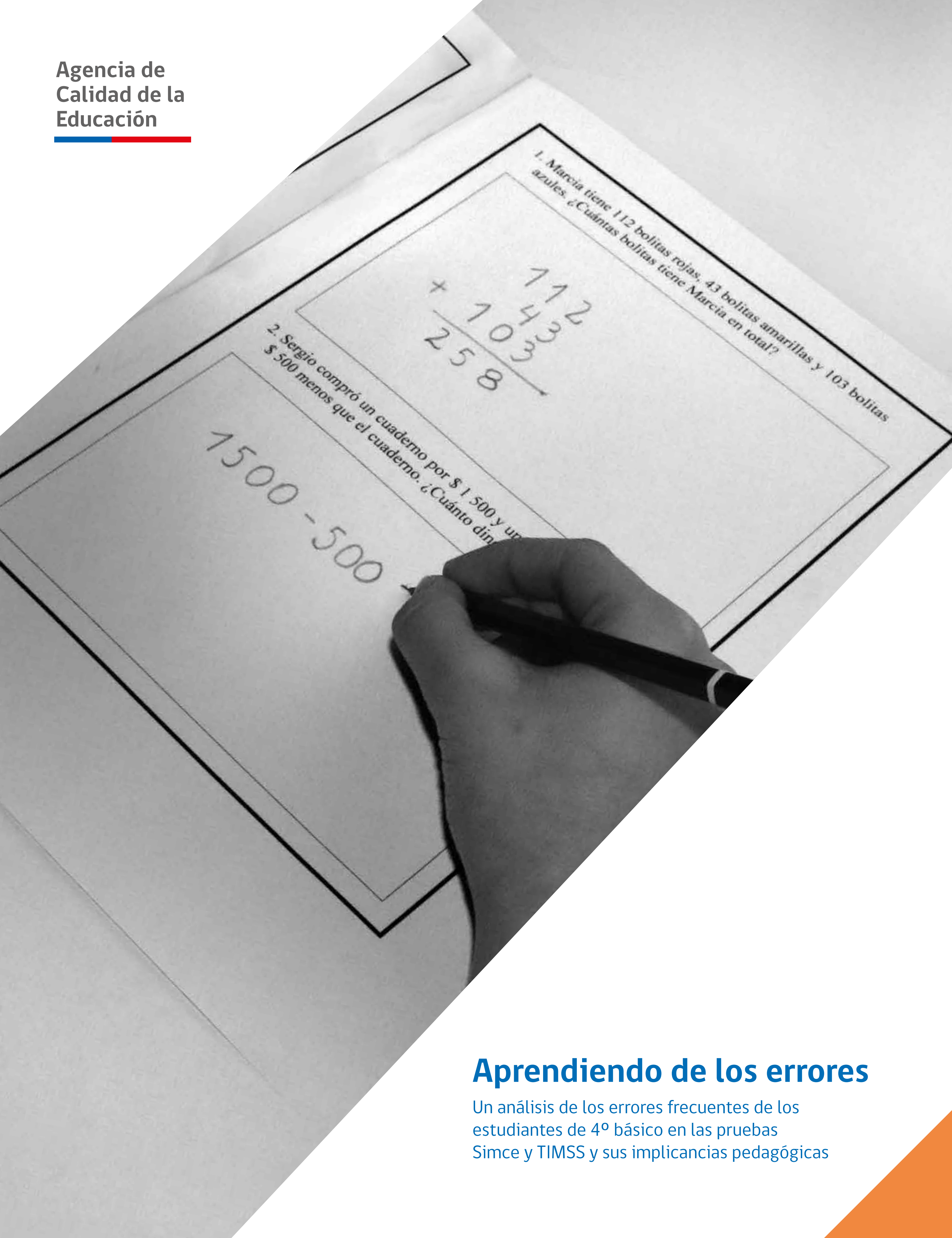
Agencia de
Calidad de la
Educación



Aprendiendo de los errores

Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de 4º básico en las pruebas Simce y TIMSS y sus implicancias pedagógicas

Agencia de
Calidad de la
Educación

Aprendiendo de los errores

Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de 4º básico en las pruebas Simce y TIMSS y sus implicancias pedagógicas

Nota: en el presente documento se utilizan de manera inclusiva términos como "el docente", "el estudiante", "los ciudadanos" y otras que refieren a hombres y mujeres.

De acuerdo a la norma de la Real Academia Española, el uso del masculino se basa en su condición de término genérico, no marcado en la oposición masculino/femenino; por ello se emplea el masculino para aludir conjuntamente a ambos sexos, con independencia del número de individuos de cada sexo que formen parte del conjunto. Este uso evita además la saturación gráfica de otras fórmulas, que puede dificultar la comprensión de lectura y limitar la fluidez de lo expresado.

Aprendiendo de los errores

Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de 4° básico en las pruebas Simce y TIMSS y sus implicancias pedagógicas

Agencia de Calidad de la Educación
contacto@agenciaeducacion.cl
600 600 2626, opción 7
Morandé 360, piso 9
Santiago de Chile
junio de 2019

Presentación

Estimados/as docentes y directivos/as:

La Agencia de Calidad de la Educación, dentro del Sistema de Aseguramiento de la Calidad de la Educación, tiene la misión de evaluar, orientar e informar para lograr una educación integral de calidad que permita que en Chile todas y todos puedan crecer y desarrollarse superando las brechas.

Para ello, la Agencia se encuentra constantemente analizando la información que obtiene respecto del logro de los aprendizajes que alcanzan los estudiantes y diseñando estrategias que permitan entregar mayor y mejor información a la comunidad respecto de ellos y orientaciones que contribuyan a tomar decisiones pedagógicas.

Dentro de este esfuerzo, a fines del año 2017 se publicó el libro *Aprendiendo de los errores: Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de II medio en las pruebas Simce y sus implicancias pedagógicas* y durante el 2018 la Agencia realizó talleres a lo largo del país difundiendo los errores sistematizados y promoviendo la reflexión de los docentes en torno a cómo pueden abordarlos en su práctica.

Una de las necesidades levantadas por los docentes que asistieron a los talleres fue la de poder contar con información respecto de los errores que cometen con frecuencia los estudiantes de cursos anteriores a II medio.

Para dar respuesta a esta necesidad, se crea el libro *Aprendiendo de los errores: Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de 4° básico en las pruebas Simce y TIMSS y sus implicancias pedagógicas*. Este libro recopila y analiza los errores más comunes que presentan los estudiantes de 4° básico al responder las pruebas Simce y TIMSS de Matemática. El objetivo es entregar información específica y orientaciones sobre los errores comunes en Matemática, para complementar el diagnóstico que realizan los docentes y directivos en relación con los logros de aprendizaje de sus estudiantes y orientar sus estrategias de enseñanza y aprendizaje.

Los invitamos a leer esta publicación, contrastarla con la de II medio y generar instancias de reflexión y discusión que permitan articular el trabajo que se realiza en todos los niveles de enseñanza, a modo de evitar los problemas identificados y mejorar los aprendizajes de los estudiantes en Matemática.

Agradecemos a los docentes y especialistas en didáctica de la Matemática que permitieron validar que los errores identificados en las pruebas estandarizadas son consistentes con los que se observan en las prácticas de aula. Contar con su generoso aporte permitió enriquecer el documento acercándolo a la realidad que se vive en el aula.

Esperamos que esta publicación les sea de utilidad promoviendo la reflexión y la acción respecto de las practicas pedagógicas que pueden transformar los errores de los estudiantes en oportunidades de aprendizaje.

Juan Bravo Miranda
Secretario Ejecutivo (S)
Agencia de Calidad de la Educación

Índice de contenidos

Índice de ejemplos

Introducción

La Agencia de Calidad de la Educación realiza evaluaciones con el propósito de entregar información que contribuya a la toma de decisiones que permitan la mejora. En este sentido, las evaluaciones Simce y los Cuestionarios de Calidad y Contexto de la Educación reportan información para la toma de decisiones de política pública, así como para la gestión directiva y pedagógica de cada comunidad educativa.

El Plan de Evaluaciones 2016-2020 elaborado por el Ministerio de Educación, en coordinación con la Agencia de Calidad de la Educación, y aprobado por el Consejo Nacional de Educación (CNED), ha planteado la importancia de mejorar las acciones de orientación y apoyo hacia las escuelas en materia de evaluación. Por ello, desde la Agencia se busca articular las evaluaciones de aula, para extraer información y orientaciones que permitan a docentes y directivos usar los resultados con el propósito de generar estrategias que favorezcan el aprendizaje de cada estudiante. Desde esta perspectiva, resulta fundamental que los instrumentos permitan a los docentes conocer mejor a sus estudiantes, saber cómo están logrando los Objetivos de Aprendizaje propuestos en la Bases Curriculares; y cuáles son los problemas y confusiones que presentan con mayor frecuencia.

El presente documento pertenece a la serie "Aprendiendo de los errores" que se introdujo al sistema en el año 2017 entregando un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de II medio en las pruebas Simce. La serie tiene como fin transmitir un enfoque de enseñanza y aprendizaje, en el que los errores cometidos por los estudiantes en las evaluaciones se transformen en oportunidades para que los docentes analicen e identifiquen los problemas y las confusiones a los que se enfrentan sus alumnos en el proceso de aprendizaje. En esta oportunidad, el presente documento permite complementar la información entregada el 2017 dando a conocer una recopilación y análisis de los errores frecuentes que presentan los estudiantes de 4° básico al responder las pruebas Simce y TIMSS de Matemática.

Para recolectar la información se realizó un estudio del conjunto de preguntas aplicadas a los estudiantes de 4° básico de nuestro país en las pruebas Simce de 2013, 2014, 2015, 2016 y 2017 y TIMSS de 2015. Las preguntas se agruparon de acuerdo con los ejes de los Objetivos de Aprendizaje de las Bases Curriculares: "Números y operaciones", "Patrones y álgebra", "Geometría", "Medición", "Datos y probabilidades"; y con la habilidad de "Resolver problemas". Cada pregunta se analizó considerando el porcentaje de estudiantes que la contesta correctamente y el porcentaje de estudiantes que contesta cada uno de los distractores. Para esto, se consideró la información que entrega cada distractor respecto de los errores de comprensión de conceptos o procedimientos que implica seleccionarlo.

En relación con este estudio, es importante tener en cuenta que:

- El currículo vigente para los estudiantes que rindieron las pruebas analizadas corresponde a las Bases Curriculares (Decreto Supremo N° 439/2012).
- Para considerar que un error es frecuente en los estudiantes de 4° básico, este debe ser cometido, en promedio, por al menos un 10% de la población.

- La base del estudio es la evidencia empírica acumulada entre los años 2013 y 2017 (preguntas Simce y TIMSS contestadas por estudiantes de 4° básico expuestos a las Bases Curriculares), por lo que no se describen aquellos errores que no se encuentran evaluados en las pruebas analizadas. Dado lo anterior, no es correcto asumir que, si algún error no se encuentra descrito en este documento, el aprendizaje con el que se relaciona se encuentra logrado por la mayoría de los estudiantes de este curso.

- Muchos de los problemas de aprendizaje analizados en este documento se asocian a conceptos y procedimientos que los estudiantes aprenden en cursos anteriores y que son sustento de lo que se espera que hayan aprendido en 4° básico. Por lo tanto, la planificación de acciones que prevengan o aborden estos problemas es una tarea que requiere ser desarrollada por el conjunto de docentes de Matemática del ciclo.

Este trabajo de sistematización de errores frecuentes espera aportar al análisis que realizan los docentes de sus evaluaciones de aula. Esta publicación complementa la realizada el 2017 para II medio, ya que entrega información que pueden usar los docentes de básica para mejorar los aprendizajes y prevenir la ocurrencia de errores en Educación Media. Se espera que este estudio sea analizado en conjunto con el de II medio por profesores de enseñanza básica y media, de manera que se pueda abordar el aprendizaje matemático de los estudiantes como un proceso continuo que ocurre a lo largo de toda la trayectoria escolar.

El documento está compuesto por dos capítulos. En el primero se describen los errores comunes que cometen los estudiantes de 4° básico en las pruebas Simce y TIMSS de Matemática, según los Ejes curriculares y la habilidad de Resolver problemas. En el segundo capítulo, se presenta un análisis de los errores en las respuestas de los estudiantes de 4° básico en las pruebas y se plantean algunas consideraciones de carácter metodológico para orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje de manera de prevenir la ocurrencia de estos errores.

Capítulo 1

Descripción de errores

En esta sección se presentan los resultados del análisis de los errores cometidos por los estudiantes al contestar las pruebas Simce de Matemática 4° básico entre los años 2013 y 2017, y la prueba de matemática de 4° grado del estudio TIMSS 2015. Se encuentran organizados de acuerdo con los ejes temáticos (números y operaciones; patrones y álgebra; geometría; medición; y datos y probabilidades) y la habilidad Resolver problemas. Para cada error, se presenta su descripción y ejemplos de preguntas tipo Simce, para que los docentes conozcan el tipo de respuestas a las que se asocia cada error.

Tabla 1.1 *Errores comunes de estudiantes de 4° básico en Matemática, según eje o habilidad*

Eje o habilidad	Ámbito de aprendizaje
Números y operaciones	• comprensión del valor posicional, • aplicación de algoritmos de cálculo en los números naturales, • comprensión del significado de fracción y • comprensión de la recta numérica.
Patrones y álgebra	• comprensión del significado de los símbolos >, <, = y • comprensión de las ecuaciones.
Geometría	• comprensión de la pirámide y • manejo de lateralidad.
Medición	• comprensión de perímetro, • comprensión de volumen, • lectura de horas y minutos en relojes análogos y • comprensión de las unidades de tiempo.
Datos y probabilidades	• lectura de pictogramas con escala.
Resolución de problemas	• representación de un problema.

1.1. Eje de números y operaciones

La evidencia revisada muestra que los estudiantes de 4° básico comúnmente presentan errores al responder preguntas que requieren comprender la estructura del conjunto de los números naturales, las operaciones básicas con los números naturales, las fracciones y la recta numérica.

Tabla 1.2 *Eje de números y operaciones. Resumen de aprendizajes involucrados en los errores de los estudiantes de 4° básico en las pruebas Simce y TIMSS de Matemática*

Subárea	Ámbitos de aprendizaje	Errores específicos asociados a las respuestas incorrectas
Comprensión de los números naturales	• comprensión del valor posicional.	• compone números según el orden en que se presentan los dígitos, sin considerar el valor posicional indicado para ellos; • alinea las cifras sin considerar su valor posicional al sumar números naturales; • registra como reserva las unidades en vez de las decenas al resolver el algoritmo de la multiplicación.
Operaciones básicas con números naturales	• aplicación de algoritmos de cálculo en los números naturales.	• resta el dígito menor al mayor, sin considerar el minuendo y el sustraendo; • resuelve adiciones o multiplicaciones sin considerar las reservas; • divide la cifra con mayor valor posicional del dividendo por el divisor y luego copia las cifras restantes del dividendo.
Fracciones	• comprensión del significado de fracción.	• identifica las partes pintadas de gris como numerador y las sin pintar como denominador, sin comprender la fracción como parte de un todo; • representa una situación contextualizada considerando como numerador el primer dato que aparece y como denominador el segundo, sin interpretar correctamente lo que cada uno representa; • resuelve la adición de fracciones de igual denominador sumando numerador con numerador y denominador con denominador, sin comprender la fracción como un solo número.
Recta numérica	• comprensión de la recta numérica.	• cuentan las marcas de la recta numérica para calcular la distancia entre dos números representados en ella, sin considerar que la distancia corresponde a la cantidad de segmentos de la recta que los separa.

1.1.1. Estructura de los números naturales

De acuerdo con las respuestas entregadas por los estudiantes de 4° básico a preguntas que evalúan la comprensión de la estructura de los números naturales, un grupo importante de ellos no ha consolidado la comprensión del valor posicional de las cifras que los componen.

Se estima que uno de cada cuatro estudiantes de 4° básico comete errores al enfrentar tareas que requieren componer o descomponer números naturales, ya que en vez de utilizar el valor posicional parece guiarse solo por el orden de aparición de los dígitos.

Ejemplo 1. *Pregunta de composición de un número natural*

El número de la casa de Alicia se forma con 7 decenas, 5 unidades y 2 centenas.
¿Cuál es el número de la casa de Alicia?

✗	752	Compone el número según el orden en que se presentan los dígitos, sin considerar su valor posicional.
✓	275	Respuesta correcta.

Además, uno de cada siete estudiantes presenta errores en preguntas que requieren sumar o restar números naturales con distintas cantidades de cifras, pues parece que no consideraría los valores posicionales al realizar la operación y alinearía las cifras de manera incorrecta.

Ejemplo 2. *Pregunta de adición de números naturales con distintas cantidades de cifras*

Marcia tiene 112 bolitas rojas, 43 bolitas amarillas y 103 bolitas azules.
¿Cuántas bolitas tiene Marcia en total?

✗	645	Alinea las cifras sin considerar su valor posicional al sumar.
✓	258	Respuesta correcta.

Otro error que se visualiza es la confusión de los valores posicionales al registrar las reservas de una multiplicación. En este caso, uno de cada cinco estudiantes de 4° básico registra la unidad como reserva y la decena como parte del producto.

Ejemplo 3. *Pregunta de multiplicación de números naturales*

¿Cuál es el resultado de 472 · 3?

✗	1 326	Registra como reserva las unidades en vez de las decenas.
✓	1 416	Respuesta correcta.

Información curricular

La comprensión del valor posicional se incluye en las Bases Curriculares desde 1° básico, específicamente en el OA 8: "Determinar las unidades y las decenas de los números del 0 al 20, agrupando de a 10, de manera concreta, pictórica y simbólica" y se extiende de manera explícita hasta 5° básico, donde se incluye en el OA 1: "Representar y describir números naturales de hasta más de 6 dígitos y menores que 1.000 millones: Identificando el valor posicional de los dígitos; componiendo y descomponiendo números naturales en forma estándar y expandida aproximando cantidades (...)". Este conocimiento matemático, además, es fundamental para los aprendizajes relativos a orden y comparación de números naturales, composición y descomposición de estos números, así como para la comprensión de las operaciones básicas y sus algoritmos.

Es necesario que los estudiantes consoliden este aprendizaje para lograr objetivos correspondientes a cursos posteriores como, por ejemplo, los OA de 7° y 8° básico relacionados con las operaciones de números enteros, cálculos de porcentaje y expresión de números naturales en notación científica.

1.1.2. Operaciones con números naturales

De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de 4° básico a preguntas que evalúan las operaciones con números naturales, una cantidad importante de los estudiantes aún no logra aplicar correctamente los algoritmos de cálculo en este conjunto numérico.

Se estima que uno de cada cuatro estudiantes de 4° básico, al restar dos números naturales de más de una cifra, cometería el error de no considerar cuál es el minuendo y cuál es el sustraendo y restaría siempre el dígito menor al mayor en cada valor posicional (evitando, así, los canjes).

Ejemplo 4. *Pregunta de sustracción con números naturales*

¿Cuál es el resultado de la siguiente sustracción?

$$\begin{array}{r} 431 \\ \underline{-\ 183} \end{array}$$

✗	352	Resta el dígito menor al mayor en cada valor posicional, sin considerar el minuendo y el sustraendo.
✓	248	Respuesta correcta.

Además, uno de cada seis estudiantes, al sumar o multiplicar números naturales, no considera la reserva.

Ejemplo 5. *Pregunta de adición con números naturales*

¿Cuál es el resultado de la siguiente adición?

$$\begin{array}{r} 245 \\ \underline{+\ 172} \end{array}$$

✗	317	No considera la reserva.
✓	417	Respuesta correcta.

Por último, al dividir números naturales, uno de cada cinco estudiantes de 4° básico procedería a dividir la cifra con mayor valor posicional del dividendo por el divisor y a completar el cociente copiando las cifras restantes del dividendo.

Ejemplo 6. *Pregunta de división con números naturales*

¿Cuál es el resultado de 84:2?

✗	44	Divide la cifra con mayor valor posicional del dividendo por el divisor y luego copia la cifra restante del dividendo.
✓	42	Respuesta correcta.

Información curricular

Las operaciones básicas se introducen en las Bases Curriculares desde 1° básico en el OA 9: "Demostrar que comprenden la adición y la sustracción de números del 0 al 20 progresivamente, de 0 a 5, de 6 a 10, de 11 a 20 con dos sumandos (...)". La comprensión de los algoritmos de cálculo de las operaciones básicas se hace explícita en 2° básico en el OA 9: "Demostrar que comprende la adición y la sustracción en el ámbito del 0 al 100: (...) aplicando el algoritmo de la adición y la sustracción sin considerar reserva (...)" y se encuentra también presente de forma explícita en 3° y 4° básico.

La consolidación de los algoritmos de cálculo de las operaciones básicas constituye un pilar fundamental para el aprendizaje de la matemática, ya que sienta las bases para aprendizajes de cursos superiores. Por ejemplo, el aprendizaje de las operaciones básicas en el conjunto de los números enteros y el de los números racionales que son OA de las Bases Curriculares de 7° y 8° básico.

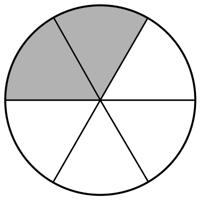
1.1.3. Fracciones

De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de 4° básico a preguntas que evalúan la comprensión de las fracciones, una cantidad importante de los estudiantes aún no consolida la comprensión del significado de una fracción.

Se estima que uno de cada ocho estudiantes de 4° básico, al representar de manera simbólica una fracción que se encuentra dada de manera pictórica, no comprendería que la fracción representa una parte del todo e interpretaría el numerador como la parte pintada o considerada y el denominador como lo que le falta a esa parte para completar el todo.

Ejemplo 7. *Pregunta de representación gráfica de una fracción*

La siguiente figura está dividida en partes iguales:



¿Qué fracción de la figura está pintada de gris?

✗	$\frac{2}{4}$	Identifica las partes pintadas de gris como numerador y las sin pintar como denominador.
✓	$\frac{2}{6}$	Respuesta correcta.

Además, uno de cada cuatro estudiantes muestra evidencia de no comprender la definición de numerador y de denominador en situaciones contextualizadas. El grupo de estudiantes que presenta esa dificultad, al representar fracciones en el contexto de resolución de problemas, asumiría que el primer número entregado corresponde siempre al numerador y el segundo siempre al denominador, sin realizar un análisis de lo que cada número representa en el contexto dado.

Ejemplo 8. *Pregunta de representación de fracción en un contexto*

Miguel tenía 12 huevos y usó 3 para hacer una tortilla.
¿Qué fracción del total de huevos que tenía usó Miguel?

✗	$\frac{12}{3}$	Considera que el primer dato que aparece es el numerador y el segundo, el denominador.
✓	$\frac{3}{12}$	Respuesta correcta.

Por último, se estima que uno de cada cuatro estudiantes de 4° básico, al sumar y restar fracciones representadas de manera simbólica, operaría sin considerar las fracciones como un solo número y realizaría un procedimiento que implica sumar o restar directamente los numeradores y los denominadores respectivamente[1].

Ejemplo 9. *Pregunta de adición de fracciones*

¿Cuál es el resultado de $\frac{5}{12} + \frac{3}{12}$?

✗	$\frac{8}{24}$	Suma numerados con numerador y denominador con denominador sin considerar la fracción como un solo número.
✓	$\frac{8}{12}$	Respuesta correcta.

Información curricular

La representación de fracciones aparece en las Bases Curriculares desde 3° básico en el OA 11: "Demostrar que comprenden las fracciones de uso común (...)". Por su parte, la adición de fracciones de igual numerador se incorpora en el OA 9 de 4° básico: "Resolver adiciones y sustracciones de fracciones con igual denominador (denominadores 100, 12, 10, 8, 6, 5, 4, 3, 2) de manera concreta y pictórica en el contexto de la resolución de problemas".

La comprensión de las fracciones es de gran relevancia, ya que constituye un aprendizaje fundamental para lo que las Bases Curriculares proponen para cursos posteriores. Por ejemplo, el OA 7 de 5° básico: "Demostrar que comprenden las fracciones propias e impropias", el OA 9 de 5° básico: "Resolver adiciones y sustracciones con fracciones propias con denominadores menores o iguales a 12 (...)", el OA 10 de 5° básico: "Determinar el decimal que corresponde a fracciones con denominador 2, 4, 5 y 10", el OA 2 de 7° básico: "Explicar la multiplicación y la división de fracciones positivas (...)", el OA 3 de 7° básico: "Resolver problemas que involucren la multiplicación y la división de fracciones y de decimales positivos (...)" y de los OA de cursos superiores que involucran números racionales y números reales.

Además, la comprensión de las fracciones es fundamental para lograr los OA que se relacionan con la comprensión del porcentaje (OA 4 de 7° básico) y la comprensión de las potencias de base racional y exponente entero (OA 2 de I medio).

[1] La proporción de estudiantes que comete este error disminuye significativamente al resolver problemas contextualizados en los que se puede recurrir a la representación concreta o pictórica de las fracciones.

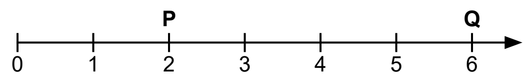
1.1.4. Recta numérica

De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de 4° básico a preguntas que requieren la comprensión de las propiedades básicas de la recta numérica, una elevada cantidad de los estudiantes no ha consolidado este aprendizaje.

Se estima que uno de cada dos estudiantes de 4° básico no consideraría que la distancia entre dos números representados en la recta numérica corresponde a los segmentos de la recta que los separan y contaría las marcas de la recta (posición en la que se encuentran los números) para cuantificar la distancia que hay entre los dos números.

Ejemplo 10. *Pregunta que requiere la comprensión de la distancia en la recta numérica*

Observa los puntos **P** y **Q** en la siguiente recta numérica:



¿A cuántas unidades de distancia están **P** y **Q**?

✗	5	Cuenta las marcas de la recta numérica para determinar la distancia entre dos números, sin considerar que la distancia corresponde a segmentos de la recta.
✓	4	Respuesta correcta.

Información curricular

La recta numérica aparece de manera formal en las Bases Curriculares en el OA 3 de 3° básico: "Comparar y ordenar números naturales hasta 1 000, utilizando la recta numérica (...)" y en el OA 1 de 4° básico: "Representar y describir números del 0 al 10 000". No obstante, es un recurso didáctico que puede utilizarse desde 1° básico para desarrollar el conteo, el orden de números, la representación de las operaciones básicas, entre otros.

La comprensión de las propiedades básicas de la recta numérica corresponde a un aprendizaje base para lograr aprendizajes de cursos posteriores, por ejemplo, el OA 5 de 6° básico: "Demostrar que comprenden las fracciones y los números mixtos: (...) representando estos números en la recta numérica", el OA 1 de 7° básico: "Mostrar que comprenden la adición y la sustracción de números enteros: Representando los números enteros en la recta numérica (...)" y el OA2 de 8° básico: "Utilizar las operaciones de multiplicación y división con los números racionales en el contexto de la resolución de problemas: Representándolos en la recta numérica (...)".

1.2. Eje de patrones y álgebra

La evidencia revisada muestra que los estudiantes de 4° básico comúnmente presentan errores al responder preguntas que requieren comprensión del significado de los símbolos > y <, y del uso del signo = en el trabajo con ecuaciones. En la Tabla 1.3 se presenta un resumen del contenido de este apartado.

Tabla 1.3 *Eje de patrones y álgebra. Resumen de aprendizajes involucrados en los errores de los estudiantes de 4° básico en las pruebas Simce y TIMSS de Matemática*

Subárea	Ámbitos de aprendizaje	Errores específicos asociados a las respuestas incorrectas
Ecuaciones e inecuaciones	• comprensión del significado de los símbolos >, <, =; • comprensión del significado de la ecuación.	• resuelve las inecuaciones como si fueran ecuaciones; • interpreta el signo igual como un indicador del resultado del problema y no como la relación de igualdad entre dos expresiones.

1.2.1. Ecuaciones e inecuaciones

De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de 4° básico a preguntas que evalúan la resolución de inecuaciones, se estima que uno de cada tres de ellos no ha consolidado la comprensión de los símbolos >, < e =. En situaciones que requieren resolver inecuaciones, estos estudiantes interpretarían el signo de desigualdad como si se tratara de un signo = y resolverían la inecuación como si fuera una ecuación.

Ejemplo 11. *Pregunta de resolver una inecuación*

Observa la inecuación:

$$x + 12 < 25$$

A continuación, escribe un valor que pueda tomar x para que se cumpla esa inecuación.

✗	13	Resuelve la inecuación como si fuera una ecuación.
✓	Cualquier valor menor que 13.	Respuesta correcta.

Información curricular

La comprensión de la igualdad y la desigualdad y del símbolo = se introducen en las Bases Curriculares en el OA 12 de 1° básico: "Describir y registrar la igualdad y la desigualdad como equilibrio o desequilibrio, usando una balanza en forma concreta, pictórica y simbólica del 0 al 20, usando el símbolo igual (=)". La introducción de los símbolos de desigualdad (>, <) ocurre en 2° básico en el OA 13: "Demostrar, explicar y registrar la igualdad y la desigualdad en forma concreta y pictórica del 0 al 20, usando el símbolo igual (=) y los símbolos no igual (>, <)". Ambos OA antes mencionados corresponden al primer acercamiento hacia el aprendizaje de las inecuaciones que se formalizará en el OA 14 de 4° básico: "Resolver ecuaciones e inecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones, comprobando los resultados de forma pictórica y simbólica del 0 al 100 y aplicando las relaciones inversas entre la adición y sustracción".

La comprensión de los símbolos =, >, < es fundamental para lograr los aprendizajes relativos a inecuaciones de 4° básico y de cursos posteriores, por ejemplo, el OA 15 de 5° básico: "Resolver problemas usando ecuaciones e inecuaciones de un paso, que involucren adiciones y sustracciones, en forma pictórica y simbólica", el OA 9 de 7° básico: "Modelar y resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas que involucran ecuaciones e inecuaciones lineales (...)" y el OA 9 de 8° básico: "Resolver inecuaciones lineales con coeficientes racionales en el contexto de la resolución de problemas (...)".

Además, de acuerdo con las respuestas entregadas por los estudiantes de 4° básico relativas a la resolución de ecuaciones, se estima que uno de cada nueve estudiantes no logra comprender lo que significa una ecuación. Estos estudiantes, al resolver ecuaciones, no interpretarían la ecuación como una igualdad entre dos expresiones y considerarían que el signo = se aplica para indicar el resultado del problema.

Ejemplo 12. *Pregunta de resolver una ecuación*

Observa la siguiente ecuación:

$$7 + x = 15$$

¿Qué valor debe tener x para que se cumpla esa ecuación?

15	Interpreta que el signo igual se usa para indicar el resultado del problema.
8	Respuesta correcta.

Información curricular

Al igual que con las inecuaciones, el primer acercamiento a la comprensión de la ecuación y del signo = se introduce en las Bases Curriculares de 1° básico. En 3° básico, se formaliza el aprendizaje de las ecuaciones en el OA 13: "Resolver ecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones y un símbolo geométrico que represente un número desconocido, en forma pictórica y simbólica del 0 al 100".

La comprensión del signo = y de lo que representa una ecuación es fundamental para lograr OA de cursos superiores relativos a ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, el OA 15 de 5° básico: "Resolver problemas usando ecuaciones e inecuaciones de un paso, que involucren adiciones y sustracciones, en forma pictórica y simbólica", el OA 9 de 7° básico: "Modelar y resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas que involucran ecuaciones e inecuaciones lineales (...)", el OA 4 de I medio: "Resolver sistemas de ecuaciones lineales (2x2) (...)" y el OA 4 de II medio: "Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones cuadráticas (...)".

1.3. Eje de geometría

La evidencia revisada muestra que los estudiantes de 4° básico comúnmente presentan errores al responder preguntas que requieren comprensión de las pirámides y manejo de la lateralidad. En la Tabla 1.4 se presenta un resumen del contenido de este apartado.

Tabla 1.4 *Eje de geometría. Resumen de aprendizajes involucrados en los errores de los estudiantes de 4° básico en las pruebas Simce y TIMSS de Matemática*

Subárea	Ámbitos de aprendizaje	Errores específicos asociados a las respuestas incorrectas
Figuras 3D	comprensión de la pirámide.	identifica la representación plana de una pirámide considerando solo las caras laterales y obviando la forma de su base.
Localización	manejo de lateralidad.	confunde izquierda y derecha.

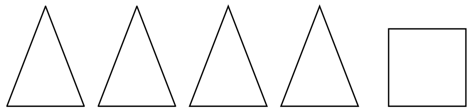
1.2.1. Figuras 3D

De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de 4° básico a preguntas que evalúan la comprensión de representaciones planas de figuras 3D, se estima que uno de cada cinco de ellos no ha consolidado la identificación de las características principales de las pirámides.

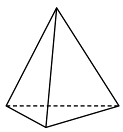
Estos estudiantes, al enfrentar preguntas en las que deben reconocer todas las caras, redes o vistas de pirámides dibujadas, consideran solo las formas de las caras laterales y no toman en cuenta la forma de la cara basal.

Ejemplo 13. *Pregunta de reconocimiento de las caras de una pirámide (caso a)*

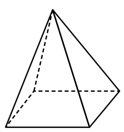
Observa todas las caras de una figura 3D:



¿Cuál es la figura 3D que tiene esas caras?



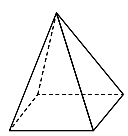
Considera solo la forma de las caras laterales sin tomar en cuenta la de la base.



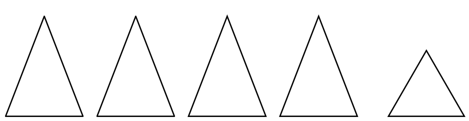
Respuesta correcta.

Ejemplo 14. *Pregunta de reconocimiento de las caras de una pirámide (caso b)*

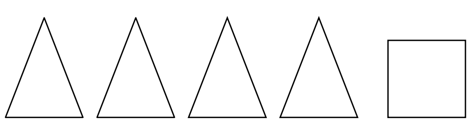
Observa la siguiente figura 3D:



¿Cuáles son todas las caras de esa figura 3D?



Considera solo la forma de las caras laterales sin tomar en cuenta la de la base.



Respuesta correcta.

Información curricular

La comprensión de la relación que existe entre figuras 3D y 2D se introduce en las Bases Curriculares en 1° básico en el OA 14: "Identificar en el entorno figuras 3D y figuras 2D y relacionarlas, usando material concreto". La descripción de figuras 3D se introduce en las Bases Curriculares con el OA 16 de 3° básico: "Describir cubos, paralelepípedos, esferas, conos, cilindros y pirámides de acuerdo a la forma de sus caras y el número de aristas y vértices".

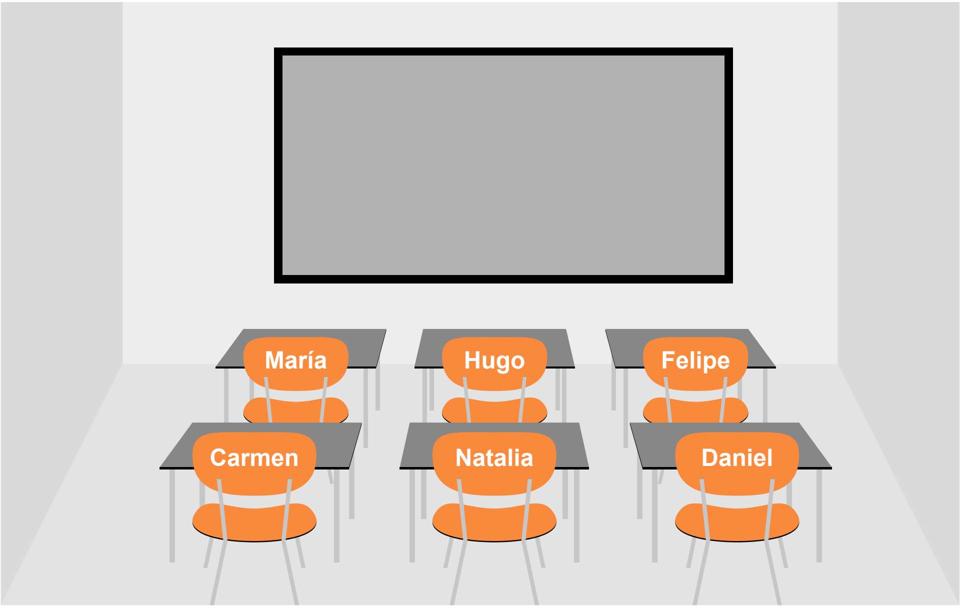
Ser capaz de describir figuras 3D, incluyendo la pirámide, es importante para lograr algunos OA del eje de Geometría de cursos posteriores, por ejemplo, el OA 16 de 4° básico: "Determinar las vistas de figuras 3D desde el frente, desde el lado y desde arriba", el OA 17 de 5° básico: "Describir y dar ejemplos de aristas y caras de figuras 3D y lados de figuras 2D (...)". Además, se vincula con los OA de 8° básico y I medio relativos a desarrollar fórmulas para encontrar el área de superficie de figuras 3D.

1.3.2. Localización

De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de 4° básico a preguntas que evalúan la descripción de la posición relativa de un objeto en un mapa, se estima que uno de cada cinco de ellos no ha consolidado la lateralidad. Este grupo de estudiantes, frecuentemente, confundiría izquierda con derecha.

Ejemplo 15. *Pregunta de localización de un objeto a partir de referentes*

En la sala de clases que se muestra en la siguiente imagen, las sillas tienen el nombre de los y las estudiantes que se sientan en ellas:



¿Quién se sienta a la izquierda de Natalia?

✗	Daniel	Confunde izquierda con derecha.
✓	Carmen	Respuesta correcta.

Información curricular

La descripción de la posición relativa de objetos y personas se introduce en las Bases Curriculares en 1° básico en el OA 13: "Describir la posición de objetos y personas con relación a sí mismos y a otros objetos y personas, usando un lenguaje común (como derecha e izquierda)". Este aprendizaje progresa en el OA 14 de 2° básico: "Representar y describir la posición de objetos y personas con relación a sí mismos y otros objetos y personas, incluyendo derecha e izquierda y usando material concreto y dibujos".

Haber consolidado la lateralidad es fundamental para el logro de los OA de cursos posteriores relativos a la localización de objetos, por ejemplo, el OA 14 de 3° básico: "Describir la localización de un objeto en un mapa simple o en una cuadrícula", el OA 15 de 4° básico: "Describir la localización absoluta de un objeto en un mapa simple con coordenadas informales (por ejemplo: con letras y números) y la localización relativa con relación a otros objetos".

Además, el manejo de la lateralidad es importante para lograr los OA de cursos superiores relativos a transformaciones isométricas y homotecias.

1.4. Eje de medición

La evidencia revisada muestra que los estudiantes de 4° básico comúnmente presentan errores al responder preguntas que requieren haber consolidado la comprensión del perímetro, el volumen y las unidades de tiempo. En la Tabla 1.5 se presenta un resumen del contenido de este apartado.

Tabla 1.5 *Eje de medición. Resumen de aprendizajes involucrados en los errores de los estudiantes de 4° básico en las pruebas Simce y TIMSS de Matemática*

Subárea	Ámbitos de aprendizaje	Errores específicos asociados a las respuestas incorrectas
Perímetro	• comprensión perímetro.	• calcula el perímetro de un rectángulo sumando las medidas dadas en 2 de sus lados (largo y ancho), sin considerar que esta figura tiene 4 lados.
Volumen	• comprensión de volumen.	• Calcula el volumen de una representación 3D contando solo los cubos visibles.
Tiempo	• lectura de horas y minutos en relojes análogos; • comprensión de las unidades de tiempo.	• lee de manera directa los números del reloj, sin considerar la transformación que se debe hacer para los minutos; • confunde el minutero con el horario; • calcula unidades de tiempo considerando equivalencias en base 10 (sistema de numeración decimal en vez de sexagesimal).

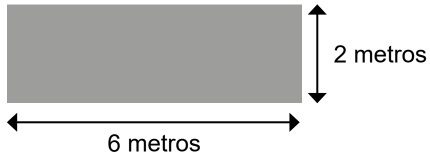
1.4.1. Perímetro

De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de 4° básico a preguntas que evalúan la comprensión del perímetro de figuras 2D, se estima que dos de cada siete de ellos no ha consolidado la comprensión de este concepto.

Este grupo de estudiantes frecuentemente calcularía el perímetro de un rectángulo sumando las medidas de su largo y su ancho sin considerar que el perímetro está formado por cuatro lados. Asimismo, calcularía el perímetro de un cuadrado en el que se le da la medida de uno de sus lados, multiplicando esa medida por dos.

Ejemplo 16. *Pregunta de cálculo del perímetro de un rectángulo*

El jardín rectangular de una casa tiene las siguientes medidas:



Se pondrá una reja alrededor de ese jardín. ¿Cuántos metros de reja se necesitan en total?

✗	8 metros	Calcula perímetro de un rectángulo sumando las medidas dadas en 2 de sus lados (largo y ancho), sin considerar que esta figura tiene 4 lados.
✓	16 metros	Respuesta correcta.

Información curricular

La comprensión del concepto de perímetro se introduce en las Bases Curriculares en el OA 21 de 3° básico: "Demostrar que comprenden el perímetro de una figura regular e irregular (...)"

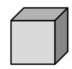
La comprensión de este concepto es fundamental para el logro de algunos OA de cursos posteriores de los ejes de Medición y, posteriormente, de Geometría, por ejemplo, el OA 11 de 7° básico: "Mostrar que comprenden el círculo: (...) estimando de manera intuitiva el perímetro y el área de un círculo; aplicando las aproximaciones del perímetro y del área en la resolución de problemas geométricos de otras asignaturas y de la vida diaria; (...)", y el OA 6 de I medio: "Desarrollar la fórmula de los valores del área y del perímetro de sectores y segmentos circulares, respectivamente, a partir de ángulos centrales de 60°, 90°, 120° y 180°, por medio de representaciones concretas".

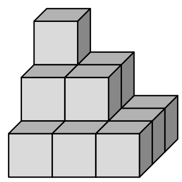
1.4.2. Volumen

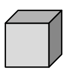
De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de 4° básico a preguntas que evalúan la comprensión del volumen de figuras 3D, se estima que uno de cada tres de ellos no ha consolidado la comprensión de este concepto.

Este grupo de estudiantes, frecuentemente, al enfrentar una pregunta en la que se solicita calcular el volumen de una figura 3D que está formada por cubos unitarios, no consideraría todo el espacio que ocupa la figura y contaría los cubos unitarios visibles o bien las caras cuadradas visibles.

Ejemplo 17. *Pregunta de cálculo del volumen de una figura 3D*

La siguiente figura está formada solo por cubitos como este: 



¿Cuántos  tiene la figura anterior?

✗	9	Cuenta los cubitos visibles.
✓	14	Respuesta correcta.

Información curricular

La comprensión del concepto de volumen de un cuerpo se introduce en las Bases Curriculares en el OA 24 de 4° básico: "Demostrar que comprenden el volumen de un cuerpo".

La comprensión de este concepto es fundamental para el logro de OA de cursos posteriores relativos a volumen, por ejemplo, el OA 19 de 6° básico: "Calcular el volumen de cubos y paralelepípedos, expresando el resultado en cm^3, m^3 y mm^3", el OA 11 de 8° básico: "Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros (...)", el OA 7 de I medio: "Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de la superficie y el volumen del cono (...)" y el OA 7 de II medio: "Desarrollar las fórmulas del área de la superficie y del volumen de la esfera (...)".

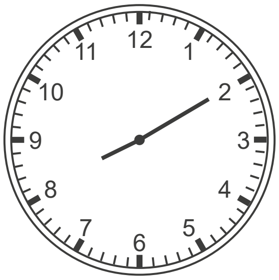
1.4.3. Tiempo

De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de 4° básico a preguntas que evalúan la lectura de tiempo en relojes análogos, se estima que uno de cada cuatro de ellos no ha consolidado este aprendizaje.

Este grupo de estudiantes, frecuentemente, haría una lectura directa de los números representados en el reloj análogo (que se relacionan directamente con las horas) sin hacer correctamente la transformación a minutos requerida, o bien, confundiría el minutero con el horario.

Ejemplo 18. *Pregunta de lectura de tiempo en un reloj análogo*

Héctor quiere ver una película que comienza a la hora que indica el reloj:



¿A qué hora comienza la película?

✗	8:02	Lee de manera directa los números del reloj, sin considerar la transformación que se debe hacer para los minutos.
✗	2:40	Confunde el minutero con el horario.
✓	8:10	Respuesta correcta.

Además, de acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de 4° básico a preguntas que requieren demostrar comprensión de la relación entre las distintas unidades de tiempo, un número importante de ellos no ha consolidado este aprendizaje.

Se estima que uno de cada siete estudiantes de 4° básico, al enfrentar situaciones en las que se requiere realizar conversiones de unidades de tiempo, cometería el error de considerar que las relaciones entre esas unidades son análogas a las que se producen en el sistema de numeración decimal y calcularía considerando equivalencias en base 10.

Ejemplo 19. *Pregunta de transformación de unidades de tiempo*

Un partido de tenis duró 3 horas y 20 minutos. ¿Cuántos minutos duró en total ese partido de tenis?

✗	320	Calcula unidades de tiempo considerando equivalencias en base 10 (sistema de numeración decimal).
✓	200	Respuesta correcta.

Información curricular

La medición del tiempo es un aprendizaje que se introduce en las Bases Curriculares en 1° básico. La lectura de horas y minutos se introduce en el OA 18 de 2° básico: "Leer horas y medias horas en relojes digitales, en el contexto de la resolución de problemas" y se retoma en el OA 20 de 3° básico: "Leer y registrar el tiempo en horas, medias horas, cuartos de hora y minutos en relojes análogos y digitales", en el OA 20 de 4° básico: "Leer y registrar diversas mediciones del tiempo en relojes análogos y digitales, usando los conceptos A.M., P.M. y 24 horas" y en el OA 21 de 4° básico: "Realizar conversiones entre unidades de tiempo en el contexto de la resolución de problemas (...)".

Comprender la transformación que se debe hacer para leer los minutos en un reloj análogo es un aprendizaje que podría servir de base para el logro de OA relativos a la comprensión del sistema de numeración sexagesimal, el cual se usa en la medición de ángulos desde 3° básico, pero que se introduce formalmente en el OA 20 de 6° básico: "Estimar y medir ángulos, usando el transportador y expresando las mediciones en grados", y cuyo uso se mantiene hasta la Enseñanza Media como, por ejemplo, en el OA 6 de I medio: "Desarrollar la fórmula de los valores del área y del perímetro de sectores y segmentos circulares, respectivamente, a partir de ángulos centrales de 60°, 90°, 120° y 180°, por medio de representaciones concretas".

1.5. Eje de datos y probabilidades

La evidencia revisada muestra que los estudiantes de 4° básico comúnmente presentan errores al responder preguntas de lectura de pictogramas. En la Tabla 1.5 se presenta un resumen del contenido de este apartado.

Tabla 1.5 *Eje de datos y probabilidades. Resumen de aprendizajes involucrados en los errores de los estudiantes de 4° básico en las pruebas Simce y TIMSS de Matemática*

Subárea	Ámbitos de aprendizaje	Errores específicos asociados a las respuestas incorrectas
Pictogramas	• lectura de pictogramas.	• lee pictogramas con escala considerando que cada ícono equivale a 1, sin tomar en cuenta la escala.

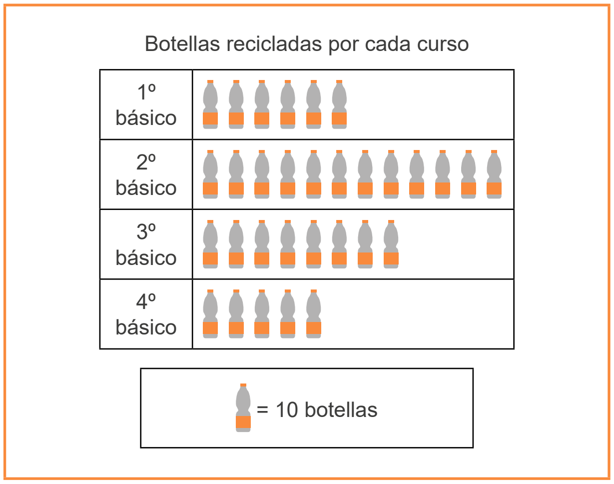
1.5.1. Pictogramas

De acuerdo con las respuestas entregadas por los estudiantes de 4° básico a preguntas que evalúan la lectura de pictogramas, un número importante de ellos no ha consolidado este aprendizaje.

Se estima que tres de cada siete estudiantes de 4° básico, al leer pictogramas con escala, haría una lectura directa de ellos considerando que cada ícono equivale a un objeto, sin tomar en cuenta la escala.

Ejemplo 20. *Pregunta de lectura de un pictograma*

El siguiente pictograma muestra la cantidad de botellas plásticas que cada curso recicló durante una campaña ecológica:



¿Cuántas botellas plásticas recicló el 3° básico?

8 — Lee el pictograma considerando que cada ícono equivale a 1, sin tomar en cuenta la escala.

80 — Respuesta correcta.

Información curricular

La construcción, lectura e interpretación de pictogramas se introduce en las Bases Curriculares en el OA 20 de 1° básico: "Construir, leer e interpretar pictogramas" y la lectura de pictogramas con escala se hace explícita por primera vez en el OA 22 de 2° básico: "Construir, leer e interpretar pictogramas con escala y gráficos de barra simple".

Aprender a mirar y aplicar la escala de un pictograma puede considerarse un aprendizaje que facilita los relativos a la resolución de problemas, ya que refuerza la necesidad de fijarse en toda la información entregada en un problema antes de proceder a seleccionar los datos y la estrategia que se usará para resolverlo. Además, favorece la interpretación entregada por otros gráficos estadísticos que también usan escalas, como son los gráficos de barra simple, de barra doble y de línea y las nubes de puntos, los cuales se utilizan en casi todos los grados de las Bases Curriculares (por ejemplo, OA 25 de 3° básico; OA 27 de 4° básico; OA 26 de 5° básico; OA 24 de 6° básico; OA 16 de 7° básico; OA 16 de 8° básico; OA 13 de I medio).

1.6. Habilidad de resolver problemas

La evidencia revisada muestra que los estudiantes de 4° básico comúnmente presentan errores al responder preguntas de resolución de problemas, específicamente, en lo que se refiere a representar el problema de manera matemática. En la Tabla 1.6 se presenta un resumen del contenido de este apartado.

Tabla 1.6 *Habilidad de preguntas de resolución de problemas. Resumen de aprendizajes involucrados en los errores de los estudiantes de 4° básico en las pruebas Simce y TIMSS de Matemática*

Subárea	Ámbitos de aprendizaje	Errores específicos asociados a las respuestas incorrectas
Resolución de problemas	• representación de un problema.	• se apoya en expresiones o conocimientos previos estereotipados para determinar la operatoria o estrategia que permite resolver un problema; • no considera toda la información presentada en el problema y opera o generaliza a partir de una parte de los datos.

1.6.1. Resolución de problemas

De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de 4° básico a preguntas que evalúan la resolución de problemas, un elevado número de ellos no ha consolidado este aprendizaje. Este grupo de estudiantes, al enfrentar situaciones que involucran la resolución de problemas, presenta dificultades para representar matemáticamente la situación dada.

Se estima que uno de cada dos estudiantes de 4° básico (la mitad de ellos), al resolver problemas rutinarios en los que se requiere seleccionar datos, organizar la información o establecer un procedimiento adecuado, se apoyaría en expresiones o conocimientos previos estereotipados para determinar la operación o el procedimiento que permitiría resolver un problema.

Ejemplo 21. *Pregunta de resolución de problemas en la que se guían por expresiones estereotipadas (caso a)*

Sergio compró un cuaderno por $ 1 500 y una libreta que le costó $ 500 menos que el cuaderno. ¿Cuánto dinero gastó en total?

✗	$ 1 000	Se guía por la expresión "menos" y realiza una sustracción de los números presentados.
✗	$ 2 000	Se guía por la expresión "en total" y realiza una adición directa de los números presentados.
✓	$ 2 500	Respuesta correcta.

Ejemplo 22. *Pregunta de resolución de problemas en la que se guían por expresiones estereotipadas (caso b)*

Camila vende dulces.

El día lunes juntó $ 250 por las ventas.

El día martes juntó $ 100 menos que el día lunes.

El día miércoles juntó $ 150 más que el día martes

¿Cuánto dinero juntó en total en los tres días?

✗	$ 500	Se guía por la expresión "en total" y realiza una adición directa de los números presentados.
✗	$ 300*	Se guía por las expresiones "menos" y "más" y resuelve restando la segunda cantidad y sumando la tercera.
✓	$ 700	Respuesta correcta.

*: Este ejemplo corresponde a una pregunta aplicada en la prueba Simce para la cual no se presentó este error como alternativa.

En cuanto a la resolución de problemas rutinarios en los que los datos, los conceptos y la operación a utilizar se presentan de forma directa, uno de cada cinco estudiantes cometería este error al guiarse por expresiones estereotipadas para determinar la operación o el procedimiento que permitiría resolverlos.

Ejemplo 23. *Pregunta de resolución de problemas en la que se guían por expresiones estereotipadas (caso c)*

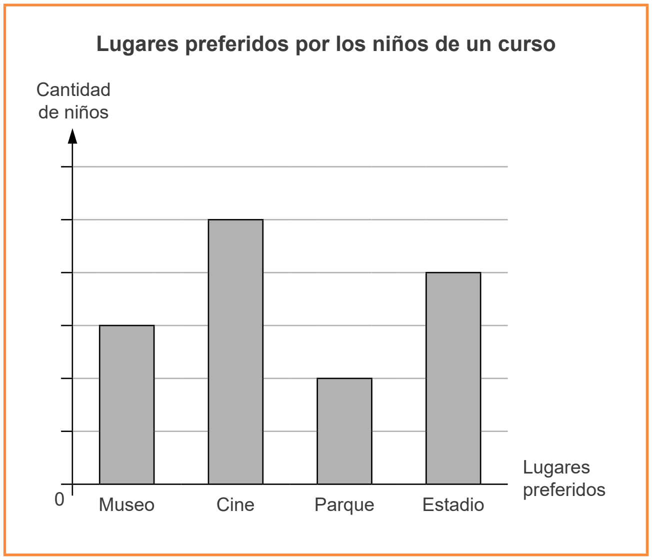
René tiene 8 cajas con 6 lápices cada una. ¿Cuántos lápices tiene en total?

✗	14	Se guía por la expresión "en total" y realiza una adición de los números presentados.
✓	48	Respuesta correcta.

Al resolver problemas, también se observa que uno de cada dos estudiantes de 4° básico tendería a no considerar toda la información presentada en el problema e idearía una solución transfiriendo experiencias previas que no necesariamente se aplican al problema si se considera toda la información que contiene.

Ejemplo 24. *Pregunta de resolución de problemas en las que transfieren experiencias previas*

En el siguiente gráfico se muestran los lugares preferidos por los niños de un curso para ir de paseo:



Si 10 niños prefieren ir al cine, ¿cuántos niños prefieren ir al estadio?

✗	9	Identifica la barra que representa la cantidad de niños que prefieren ir al cine y la que representa a los que prefieren ir al estadio, pero no considera la escala del gráfico y asume que cada línea horizontal representa un aumento de una unidad y que, por lo tanto, la respuesta es 10 –1.
✗	4	Considera solo la barra que representa la cantidad de niños que prefieren ir al estadio y realiza una lectura que ignora la información sobre la escala entregada en el enunciado y asume que cada línea horizontal representa un aumento de una unidad y que, por tanto, la respuesta es 4.
✓	8	Respuesta correcta.

Además, uno de cada tres estudiantes tiende a no considerar el problema en su totalidad y a generalizar una solución que se aplica a una parte de los datos.

Ejemplo 25. *Pregunta de resolución de problemas en la que generalizan a partir de información parcial*

En la siguiente secuencia, cada número se forma multiplicando el número anterior siempre por un mismo número:

3 ➡ 6 ➡ 12 ➡ ☐ ➡ 48

¿Qué número va en ☐?

✗	15	Solo considera una relación aditiva entre los números 3 y 6 (6 = 3 + 3) y la generaliza a la relación entre el número 12 y el número desconocido.
✗	18	Solo considera una relación aditiva entre los números 6 y 12 (12 = 6 + 6) y la generaliza a la relación entre el número 12 y el número desconocido.
✓	24	Respuesta correcta.

Información curricular

Las Bases Curriculares de matemática proponen, desde 1° básico, el desarrollo de 4 habilidades: Representar, Modelar, Argumentar y comunicar y Resolver problemas, las que se interrelacionan y permiten la aplicación de los conceptos aprendidos en diversos contextos y situaciones y la integración de estos con los conocimientos previos y del mundo que poseen los estudiantes.

Las Bases Curriculares consideran la resolución de problemas como el foco de la enseñanza de la matemática, ya que busca promover el desarrollo de formas de pensamiento y de acción que posibiliten a los estudiantes procesar información proveniente de la realidad y así profundizar la comprensión de la disciplina y de los conceptos aprendidos.

Además, plantean que esta habilidad debe ser desarrollada en una diversidad de contextos que propongan distintos desafíos cognitivos para los estudiantes. Se considera que se debe enfrentar a los estudiantes a problemas rutinarios y no rutinarios que les den la oportunidad de construir la matemática desde lo más simple a lo más complejo, creando y probando estrategias que les permitan encontrar respuesta a la incógnita planteada, representando y modelando situaciones en lenguaje algebraico, comprobando la pertinencia de sus resultados y creando nuevos problemas.

En este sentido, guiarse por expresiones o conocimientos previos estereotipados, transferir experiencias previas sin evaluar su pertinencia para resolver un determinado problema y hacer generalizaciones a partir de información parcial y sin comprobarlas; son prácticas contrarias a lo que proponen las Bases Curriculares. Los docentes deben identificar los errores recurrentes y diseñar estrategias didácticas para que sus estudiantes reconozcan las fallas de tales prácticas y las conclusiones erróneas a las que conducen.

Capítulo 2

Análisis de errores y recomendaciones para la reflexión pedagógica

En el capítulo anterior se identificaron errores en los diferentes Ejes temáticos planteados en las Bases Curriculares y en la habilidad Resolver problemas. En este capítulo se analizarán algunos de esos errores y se entregarán recomendaciones para la reflexión pedagógica sobre cómo se puede abordar el proceso de enseñanza y aprendizaje para evitar que estos errores se produzcan.

Los errores que se abordan en este capítulo se encuentran organizados en cuatro líneas:

2.1. Desarrollo de la habilidad de resolución de problemas.

2.2. Comprensión de los números naturales y las operaciones básicas.

2.3. Comprensión de las fracciones y su representación.

2.4. Comprensión de ecuaciones e inecuaciones.

La elección de estas líneas en particular obedece a que para ellas se cuenta con una cantidad y variedad de ejemplos que facilitan la identificación de temas que se pueden analizar para promover la reflexión pedagógica.

Se espera que el trabajo que se presenta en este capítulo sirva de modelo para que los docentes puedan analizar los errores expuestos y abordados en el capítulo 1 y otros que puedan cometer sus estudiantes. Además, se espera que los ejemplos presentados en este capítulo sirvan de modelo para la reflexión pedagógica que pueden hacer los docentes al identificar los errores que presentan sus estudiantes.

2.1. Desarrollo de la habilidad de resolución de problemas

La resolución de problemas es una de las cuatro habilidades planteadas en las Bases Curriculares. Esta juega un papel preponderante por sus innumerables aplicaciones, tanto en el ámbito escolar como en la vida cotidiana. Enfrentar situaciones que requieren resolver problemas estimula la aplicación de habilidades del pensamiento como analizar, crear, evaluar, contrastar, comprobar, etc.

Aprender a resolver problemas aplicando los conocimientos matemáticos de cada curso implica que los estudiantes deben poner en juego variadas habilidades como, por ejemplo, comprender el enunciado, analizar la información disponible, seleccionar la información requerida, representar o modelar la situación presentada, diseñar una estrategia de solución, desarrollar los procedimientos correspondientes, interpretar y validar las soluciones obtenidas, comunicar resultados, etc. Resolver problemas y tener que aplicar estas habilidades, favorece el desarrollo del pensamiento y la capacidad de transferir el conocimiento a nuevos contextos.

En la resolución de problemas, cada situación es única y tiene sus propios matices y, por lo tanto, no existen procedimientos válidos que puedan aplicarse de manera mecánica a todas para abordarlas con éxito. Sin embargo, es posible señalar algunos pasos que pueden ayudar a enfrentar cada situación particular, los que se describen a continuación.

Pasos en la resolución de problemas

1. **Comprensión del problema**

   El primer paso para la resolución de un problema es reconocer la pregunta a la que se debe dar respuesta y los datos que se disponen para ello. Es decir, que los estudiantes comprendan lo que se les está preguntando y discriminen claramente entre la información disponible y la información que se debe usar para llegar a la solución.

2. **Representación de la situación concreta en lenguaje matemático (modelamiento de la situación)**

   El segundo paso corresponde a un análisis de la información conocida, de las herramientas matemáticas con las que se dispone y de las experiencias previas relacionadas con el problema planteado para, basándose en estos antecedentes, diseñar una estrategia de resolución que implique expresar la situación concreta en un lenguaje matemático. En la mayoría de los problemas que se plantean, tanto en educación básica como en educación media, dicho lenguaje se refiere al uso de herramientas como, por ejemplo, propiedades de los números, operaciones básicas o ecuaciones algebraicas. De esta forma, el problema del mundo real se transforma en un problema de carácter matemático.

3. **Resolución del problema matemático**

   El tercer paso corresponde a la resolución del problema matemático, empleando las herramientas matemáticas que están implícitas en él. Por ejemplo, desarrollar los procedimientos de cálculo que corresponda, resolver la o las ecuaciones planteadas, aplicar los teoremas que sean pertinentes, etc. En este paso se llega a una solución matemática del problema planteado.

4. **Interpretación y evaluación de resultados**

    El último paso corresponde a interpretar la solución matemática vinculándola con el contexto en que surgió el problema y evaluar su consistencia.

Consideraciones respecto de los pasos para resolver problemas

Si bien los pasos descritos anteriormente se aplican a la resolución de problemas en todos los niveles educativos, es importante tener algunas consideraciones sobre cómo estos pueden abordarse en los primeros cursos de la educación básica.

Al trabajar la resolución de problemas en estos cursos, se sugiere que en el paso "Comprensión del problema" se cautele que los estudiantes hayan comprendido exactamente de qué trata el mismo; para ello, se recomienda que lean y repitan el enunciado, lo parafraseen, lo comuniquen con sus propias palabras, que subrayen información relevante, separen sus partes, identifiquen qué información proporciona el problema y qué información pide, es decir, que distingan claramente qué es lo que se les pregunta, cuál es la información que les dan y cuál es la información que necesitan. Si este primer paso no está logrado, los estudiantes difícilmente podrán llegar a plantear y resolver el problema.

En lo que respecta al paso "Representación de la situación concreta en lenguaje matemático", este requiere establecer relaciones entre la información presentada en el problema y el significado de las operaciones y, a partir de ello, tomar decisiones que permitan visualizar la situación en forma simbólica. Implica decidir cómo organizar los datos, qué fórmulas, operaciones, gráficos o esquemas pueden representar la situación para crear un plan que permita resolver el problema. Se trata de un proceso que depende mucho de las formas de razonamiento de los estudiantes, de sus experiencias previas y de la naturaleza de la situación propiamente tal. Generalmente, hay varias maneras (o más de una) de resolver un mismo problema correctamente, se sugiere que el docente enfatice que no existe una única manera de llegar a la solución de los problemas y que promueva la búsqueda de estrategias alternativas para resolverlos.

En esta etapa de representación matemática del problema es cuando los estudiantes presentan las mayores dificultades, ya que deben tomar decisiones de acuerdo con su interpretación del problema y con las herramientas con las que cuentan. Por esto, se sugiere que los docentes se detengan en este punto. Se recomienda que, una vez que los estudiantes hayan comprendido el problema, los docentes los guíen en la búsqueda de las estrategias de resolución. Para ello, se sugiere que les hagan preguntas del tipo: ¿cómo puede resolverse el problema?, ¿qué operaciones les pueden ayudar para resolverlo?; que incentiven a los estudiantes a compartir sus estrategias y explicar cómo llegaron a ellas; y que los ayuden a analizar si las estrategias les permitirán llegar a la respuesta, aceptando diferentes propuestas, poniéndolas en práctica y discutiendo los pro y los contra de cada una de ellas.

En cuanto al paso "Resolución del problema matemático", se recomienda cautelar que los estudiantes apliquen correctamente las operaciones y propiedades correspondientes a la representación matemática o modelamiento de la situación planteada; que no pierdan de vista qué representa el procedimiento que están aplicando y sean capaces de explicarlo, y que tengan en cuenta cómo se relaciona ese procedimiento con la situación. Este paso concluye con la determinación de una solución matemática al problema planteado.

El último paso, "Interpretación y evaluación de resultados obtenidos", es una de las etapas determinantes del proceso de resolución de problemas, ya que es aquí cuando se hace necesario evaluar si el resultado obtenido tiene sentido dentro del contexto planteado; es decir, si efectivamente responde la pregunta. Muchos estudiantes cometen el error de dar por terminada la tarea de resolver un problema una vez que han obtenido la solución matemática la que, en algunos casos, puede no responder directamente a la situación planteada.

Para esta etapa de interpretación y evaluación es fundamental que los estudiantes realicen actividades tendientes a identificar cuál es la interpretación correcta de un resultado obtenido. Deben ser capaces de responder preguntas tales como: ¿qué significa que el resultado sea tal o cual?; ¿tiene sentido el resultado obtenido dentro del contexto de la situación planteada?; ¿soluciono el problema con esta respuesta?; si resuelvo el problema utilizando otra estrategia, ¿llegaré al mismo resultado?

Así también, es necesario que tomen conciencia de que esta etapa del proceso es tan importante como las anteriores, pues si no se realiza, no se puede estar seguro de que el problema ha sido resuelto. También se sugiere que, una vez resuelto el problema, los estudiantes puedan comunicar sus procedimientos, explicarlos e interpretar los resultados.

Consideraciones generales para abordar el desarrollo de la habilidad de resolución de problemas

A continuación, se presentan algunos aspectos que es conveniente considerar en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas.

El desarrollo de la capacidad para resolver problemas haciendo uso de herramientas matemáticas debe realizarse de forma sistemática y paulatina, de modo que todos los estudiantes logren la asimilación y dominio de las habilidades correspondientes. Se trata, asimismo, de un proceso largo que se debe desarrollar desde los primeros niveles del sistema escolar. En tal sentido, el trabajo coordinado entre los docentes de los diferentes cursos y ciclos en torno a cómo abordar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas puede favorecer el desarrollo de esta habilidad que va más allá de su aplicación en Matemática.

Al iniciar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas concretos, se recomienda plantear problemas simples. Además, se sugiere presentarlos a través de dramatizaciones, diagramas o dibujos referidos a la situación problemática planteada y resolverlos de manera grupal, destacando uno a uno los pasos que se están realizando.

Posteriormente, se sugiere utilizar diversas formas de trabajo, por ejemplo, acompañar a los estudiantes mientras resuelven un problema, hacer que trabajen en grupo o en forma individual para encontrar la solución. Cualquiera sea la forma que se utilice, es fundamental hacer hincapié en los pasos que se realizaron para lograr el resultado final.

En aquellos casos en los que se presenten los problemas en forma escrita, se sugiere tomar en consideración que la comprensión lectora se transforma en un requisito indispensable para su resolución. Si los estudiantes presentan dificultades de comprensión lectora, se recomienda apoyarse en otros medios para plantear los problemas; por ejemplo, narraciones, dibujos o diagramas.

Además, se sugiere que durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas se propongan situaciones variadas, cuyo objetivo no se limite a ejercitar un determinado procedimiento de cálculo, sino que estén orientadas a desarrollar cada una de las etapas anteriormente señaladas.

Luego de que los estudiantes han internalizado que la resolución de problemas requiere la realización de los pasos mencionados anteriormente, podrán poco a poco encontrar su propia forma de enfrentar situaciones problemáticas. En tal sentido, se sugiere proporcionar instancias en las cuales, enfrentados a un problema específico, tengan la posibilidad de dialogar: discutir acerca de las estrategias a utilizar para resolverlo y de la interpretación que habría que dar a los resultados obtenidos. Para esto son especialmente útiles los problemas que pueden resolverse de más de una forma, otorgando libertad para que cada estudiante desarrolle su propia solución.

En relación con los tipos de problemas que es conveniente presentar en cada uno de los niveles de enseñanza, se sugiere que en lo posible estén acordes a los intereses y capacidades de los estudiantes, que consideren temáticas variadas, que constituyan un desafío para los estudiantes y que su solución implique adquirir nuevos conocimientos, ya sea acerca de sí mismos, de su entorno o del mundo en general.

Por último, es conveniente subrayar que enfrentarse a una situación problemática y poder darle solución conduce a un estado de satisfacción, aprecio y valoración por lo que se es capaz de hacer, que eleva la autoestima y favorece el desarrollo emocional, factor fundamental para impulsar y fortalecer la motivación por seguir aprendiendo. Por esto, se recomienda trabajar la resolución de problemas con un enfoque en el cual los errores se consideren oportunidades para reflexionar y aprender. Esto implica un acompañamiento de los estudiantes en el proceso y la incorporación de instancias de conversación.

Ejemplos de errores asociados a la habilidad de resolver problemas

Ejemplos de errores en los que los estudiantes se guían por el uso de expresiones estereotipadas

Ejemplo 21. *Pregunta de resolución de problemas en la que se guían por expresiones estereotipadas (caso a)*

Sergio compró un cuaderno por $ 1 500 y una libreta que le costó $ 500 menos que el cuaderno. ¿Cuánto dinero gastó en total?

✗	$ 1 000	Se guía por la expresión "menos" y realiza una sustracción de los números presentados.
✗	$ 2 000	Se guía por la expresión "en total" y realiza una adición directa de los números presentados.
✓	$ 2 500	Respuesta correcta.

Ejemplo 23. *Pregunta de resolución de problemas en la que se guían por expresiones estereotipadas (caso c)*

René tiene 8 cajas con 6 lápices cada una. ¿Cuántos lápices tiene en total?

✗	14	Se guía por la expresión "en total" y realiza una adición de los números presentados.
✓	48	Respuesta correcta.

Los errores que cometen los estudiantes al responder las preguntas de los ejemplos 21 y 23 tienen en común que, en vez de dar respuesta a la situación que se les está preguntando, llegan a una solución que puede atribuirse a la aplicación de una regla memorística sin verificar si es pertinente en el contexto del problema. Este tipo de error se asocia a dificultades en el primer paso de la resolución de problemas.

El ejemplo 21 plantea una situación en la cual se pide determinar la cantidad total de dinero que gastó Sergio. La dificultad de este problema está dada porque los valores parciales que gastó no se presentan de forma directa. Estos valores están dados por una relación entre ambos (la libreta costó

$500 menos que el cuaderno) y, por tanto, se requiere hacer cálculos intermedios (determinar el valor de la libreta) antes de poder sumar ambas cantidades.

La situación presenta una dificultad adicional dada por la presencia de expresiones o marcas textuales "estereotipadas" que generalmente se asocian de manera mecánica a ciertas operaciones básicas. En este caso, la expresión "menos" es comúnmente asociada a la sustracción y la expresión "en total" es usualmente asociada a la adición.

El ejemplo 23 corresponde a una situación típica de multiplicación, sin embargo, una cantidad importante de estudiantes la resuelve a través de una adición. Esto podría explicarse por la presencia de la expresión "en total" que suele asociarse de manera estereotipada a la adición.

En ambos ejemplos, las expresiones estereotipadas se convierten en marcas textuales potentes que, si no son analizadas en el contexto, pueden inducir a los estudiantes a cometer esos errores.

Recomendaciones pedagógicas

Comprensión de que cada problema es único y no existen recetas

Para evitar que los estudiantes cometan el tipo de errores presentes en los dos ejemplos anteriores, se sugiere enfrentarlos a diferentes situaciones en las que una misma expresión o marca textual tenga significados distintos. Se recomienda hacer que los estudiantes representen estas situaciones a través de dibujos, dramatizaciones, metáforas, etc. y guiarlos para que deduzcan el significado de cada caso y lo distingan del significado de las otras. Además, se sugiere que se hagan preguntas guiadas que conduzcan a que los estudiantes concluyan que no existen recetas, sino que se debe analizar cada situación en forma particular.

Analizar el enunciado de manera sistemática

Muchas veces los enunciados de los problemas no se encuentran presentados de manera directa y requieren seleccionar o reorganizar información, tal como ocurre en el ejemplo 21. Para que los estudiantes puedan abordar este tipo de problemas, es importante que los docentes les enseñen a leer y analizar los enunciados de manera sistemática para identificar la información que entregan y cómo la entregan.

En el ejemplo 21 es fundamental que los estudiantes se den cuenta de que el enunciado consta de varias partes, que cada una de esas partes aporta una información diferente, y que de esa información se puede obtener nueva información. Además, es importante que tengan claridad respecto de qué se está preguntando y qué información se necesita para responder esa pregunta; en este caso se necesita conocer cuánto costó cada producto.

Se propone que los docentes enseñen a los estudiantes a identificar la pregunta y la información que se necesita conocer para responderla. En el caso de la pregunta del ejemplo 21 se puede guiar a los estudiantes con preguntas del tipo: ¿qué se quiere saber?, ¿qué información necesito para poder saberlo?

En el caso del problema del ejemplo 21, se necesita conocer cuánto costó el cuaderno y cuánto costó la libreta. El enunciado dice explícitamente cuánto costó el cuaderno ($1 500); sin embargo, el costo de la libreta no está dado de manera directa, sino en relación con el valor del cuaderno ($500 menos que el cuaderno). Se sugiere que los docentes guíen a los estudiantes para que se den cuenta de que este problema se puede dividir en dos partes: una primera en la que se debe determinar cuánto costó la libreta y una segunda en la que, sabiendo cuánto costó la libreta, se debe calcular cuánto costaron los dos productos en conjunto. Además, se recomienda que se incentive a los estudiantes a representar el problema, compartir sus representaciones y explicar cómo llegaron a ellas.

Se recomienda reforzar este tipo de problemas con variados ejemplos de distinta naturaleza y analizando cada situación en profundidad. Se sugiere que, para ello, se dé espacio a los estudiantes para que expongan sus puntos de vista, expliquen lo que entienden, consulten y superen sus dudas. Por último, es importante que los docentes eviten que sus estudiantes busquen y utilicen procedimientos mecánicos y automatizados para la resolución de problemas y refuercen la necesidad de analizar cada problema en sí mismo para encontrar el procedimiento que sirva para resolverlo.

Aprender del error

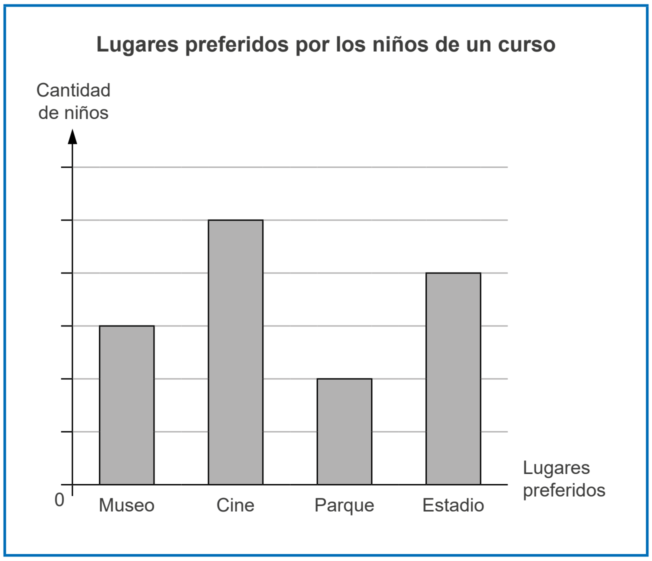
Es frecuente que los estudiantes memoricen estrategias y las apliquen directamente a las situaciones que enfrentan sin detenerse a analizar su pertinencia. Cuando esto ocurra, se sugiere que los docentes intenten comprender por qué los estudiantes llegaron al resultado incorrecto y cuáles son las claves textuales que usaron para guiarse. Esto puede darse por diversos motivos que van desde que se apresuraron y no leyeron detenidamente el enunciado, hasta que estén asociando de manera consciente y sistemática ciertas expresiones con ciertas operaciones.

Además, se sugiere que los docentes, a través de preguntas guiadas, ayuden a que los estudiantes se den cuenta de que cada problema es único y que siempre que se llegue a un resultado, se debe evaluar su pertinencia.

Ejemplo de error en el que los estudiantes transfieren experiencias o conocimientos previos

Ejemplo 24. *Pregunta de resolución de problemas en las que transfieren experiencias previas*

En el siguiente gráfico se muestran los lugares preferidos por los niños de un curso para ir de paseo:



Si 10 niños prefieren ir al cine, ¿cuántos niños prefieren ir al estadio?

✗	9	Identifica la barra que representa la cantidad de niños que prefieren ir al cine y la que representa a los que prefieren ir al estadio, pero no considera la escala del gráfico y asume que cada línea horizontal representa un aumento de una unidad y que, por lo tanto, la respuesta es 10 –1.
✗	4	Considera solo la barra que representa la cantidad de niños que prefieren ir al estadio y realiza una lectura que ignora la información sobre la escala entregada en el enunciado y asume que cada línea horizontal representa un aumento de una unidad y que, por tanto, la respuesta es 4.
✓	8	Respuesta correcta.

En la pregunta del ejemplo 24 se presenta un problema que requiere interpretar la escala utilizada en un gráfico de barras. Específicamente, requiere determinar el valor de una de las barras del gráfico relacionando información que se entrega de manera explícita (la cantidad de niños que prefieren ir al cine) con conocimientos sobre lectura de gráficos (cómo se leen las escalas de los gráficos).

Para responder correctamente esta pregunta, los estudiantes deben saber que en un gráfico los valores de la escala se presentan en intervalos de igual magnitud (que pueden ser de 1 en 1; 2 en 2; 3 en 3; etc.), por lo que es importante fijarse bien en la magnitud de intervalo en que se encuentran.

Si los estudiantes no consideran esta información, pueden cometer el error de asumir que los intervalos son de 1 en 1 y operar de acuerdo con ello. Esto puede estar relacionado con transferir una experiencia previa (la lectura de gráficos cuya escala está en intervalos de una unidad) a una situación, sin verificar su pertinencia.

Recomendaciones pedagógicas

Reforzar la idea de que antes de generalizar se debe evaluar la pertinencia de hacerlo

La habilidad de transferir conocimientos o procedimientos aprendidos previamente a situaciones novedosas para poder resolverlas es fundamental en la matemática y en la vida en general. Se trata de una habilidad compleja ya que requiere, por una parte, hacer generalizaciones y, por otra, evaluar si esas generalizaciones se aplican o no a la nueva situación. Se sugiere que los docentes la aborden de manera sistemática y transversal, de manera que los estudiantes la adquieran y la puedan aplicar.

Para que no se produzcan situaciones como la del ejemplo 24, se sugiere que los docentes acompañen a sus estudiantes en los procesos de transferencia de conocimientos, de manera que puedan reforzar que antes de transferir siempre se debe evaluar la pertinencia de hacerlo.

Para ello, se recomienda partir por situaciones en las que los aprendizajes iniciales son transferibles a situaciones nuevas. Por ejemplo, dado que el aprendizaje de la estructura de los números naturales se puede transferir a ámbitos numéricos cada vez más grandes, un docente podría pedir a sus estudiantes hipotetizar respecto de cómo se descompondría un número natural que está fuera del ámbito numérico estudiado. A partir de ello, se sugiere guiarlos para evaluar si esta transferencia es pertinente y por qué lo es.

Posteriormente, se sugiere presentar situaciones en la que los aprendizajes previos no son trasferibles de manera directa. Por ejemplo, presentar una situación que requiera sumar fracciones de igual denominador. Al sumar dos números naturales se busca conocer la cantidad total que se obtiene al juntar las cantidades parciales, en el caso de las fracciones, se busca conocer la parte total del todo que se obtiene al juntar las partes parciales. Se recomienda que los docentes presenten estas situaciones y les pidan a sus estudiantes que las analicen utilizando material concreto de manera que se den cuenta de que los significados cambian y que, por tanto, los aprendizajes no pueden ser transferidos de manera directa. En el caso del ejemplo de adición de fracciones, los docentes pueden guiar la discusión con preguntas del tipo: “Al sumar números naturales, se suman unidades con unidades, decenas con decenas, etc., ¿qué creen que hay que hacer para sumar fracciones?”, “usemos el material concreto para verificar si eso que proponen resulta, ¿por qué creen ustedes que no resultó?" Una vez que los estudiantes hayan probado su estrategia, se les puede mostrar cómo resolver la adición y hacerlos reflexionar respecto de qué diferencias y similitudes se observan con relación a cómo se realiza la adición en los naturales. Es importante que los docentes expliciten que hay elementos que se transfieren y otros que cambian y que es importante siempre evaluar si la trasferencia es o no pertinente.

Aprender del error

Cuando se produzca este tipo de error, se recomienda que los docentes indaguen por qué los estudiantes llegan a un resultado incorrecto e identifiquen los supuestos sobre los que se basan los errores. Se sugiere que se converse con los estudiantes acerca de estos supuestos, su origen y se les propongan ejemplos de situaciones en las que no se cumplen, de manera que puedan corregirlos al darse cuenta de que no se aplican en todos los contextos.

En el ejemplo 24 es posible que los estudiantes que cometen este error estén acostumbrados a leer gráficos con escalas unitarias y que, de ello, hayan generalizado que: todos los gráficos tienen una escala unitaria, la estrategia para leer una barra es agregar una unidad por cada línea horizontal y la estrategia para leer una barra, en relación con otra, es agregar o quitar una unidad por cada línea horizontal. Al comprender los supuestos de los estudiantes, los docentes pueden generar estrategias para corregirlos. En este caso particular, pueden presentar diferentes tipos de gráficos y orientar a los estudiantes para que se den cuenta de que el supuesto de aumentar de uno en uno no siempre se cumple por lo que es necesario que antes de leer un gráfico se fijen en su escala.

Ejemplos de errores en los que los estudiantes omiten información relevante

Ejemplo 25. *Pregunta de resolución de problemas en la que generalizan a partir de información parcial*

En la siguiente secuencia, cada número se forma multiplicando el número anterior siempre por un mismo número:

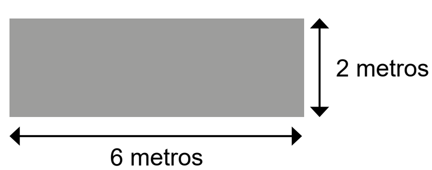
3 → 6 → 12 → ☐ → 48

¿Qué número va en ☐?

	15	Solo considera una relación aditiva entre los números 3 y 6 (6 = 3 + 3) y la generaliza a la relación entre el número 12 y el número desconocido.
	18	Solo considera una relación aditiva entre los números 6 y 12 (12 = 6 + 6) y la generaliza a la relación entre el número 12 y el número desconocido.
	24	Respuesta correcta.

Ejemplo 16. *Pregunta de cálculo del perímetro de un rectángulo*

El jardín rectangular de una casa tiene las siguientes medidas:

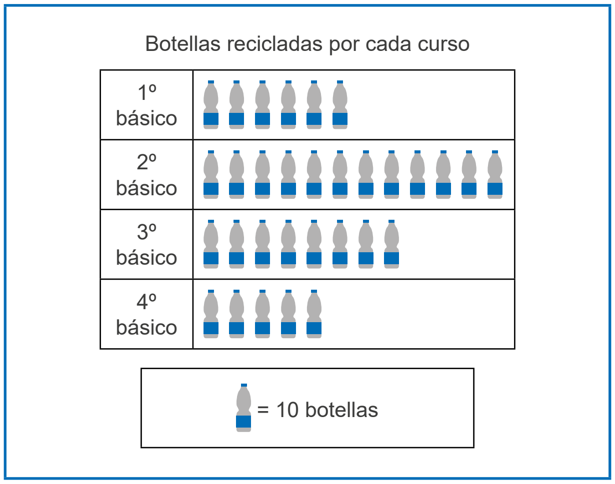


Se pondrá una reja alrededor de ese jardín. ¿Cuántos metros de reja se necesitan en total?

	8 metros	Calcula perímetro de un rectángulo sumando las medidas dadas en 2 de sus lados (largo y ancho), sin considerar que esta figura tiene 4 lados.
	16 metros	Respuesta correcta.

Ejemplo 20. *Pregunta de lectura de un pictograma*

El siguiente pictograma muestra la cantidad de botellas plásticas que cada curso recicló durante una campaña ecológica:



¿Cuántas botellas plásticas recicló el 3° básico?

✗	8	Lee el pictograma considerando que cada ícono equivale a 1, sin tomar en cuenta la escala.
✓	80	Respuesta correcta.

Los errores que cometen los estudiantes al responder las preguntas de los ejemplos 25, 16 y 20 tienen en común el que omiten información relevante para la resolución del problema. Este tipo de error se asocia a dificultades en el primer paso de la resolución de problemas.

En la pregunta del ejemplo 25 se presenta un problema que requiere encontrar un término desconocido de una secuencia numérica a partir de un enunciado que entrega pistas sobre la regla que se debe aplicar para obtener cada término (multiplicar el número anterior siempre por un mismo número).

Si los estudiantes toman en cuenta lo planteado en el encabezado, pueden resolver el problema de manera directa usando dos términos consecutivos de la secuencia para obtener el número por el que hay que multiplicar el número anterior. El porcentaje de error asociado a esta pregunta y el error más frecuente que cometen los estudiantes (15 o 18) indicaría que una cantidad importante de ellos omite la información entregada por el enunciado y procede a encontrar la regla basándose únicamente en la secuencia.

En la pregunta del ejemplo 16 se presenta un problema que requiere calcular el perímetro de un rectángulo dada su representación pictórica, la medida de su largo y la medida de su ancho. El enunciado no exige la comprensión del término “perímetro”, pues no utiliza ese término y se refiere directamente a que “se pondrá una reja alrededor de ese jardín”, pero requiere conocer que en un rectángulo los lados opuestos miden lo mismo.

El error más frecuente que cometen los estudiantes al resolver este problema es sumar las dos medidas que se les dan de manera explícita. Al igual que con el error asociado al ejemplo 25, se podría inferir que los estudiantes que obtienen como resultado 8 metros, omitieron información relevante del problema (que la reja debe ponerse alrededor del jardín).

La pregunta del ejemplo 20 requiere leer un pictograma con escala. Para responder correctamente esta pregunta se necesita relacionar la información que entrega el pictograma mismo con la que entrega su escala. El error más frecuente que cometen los estudiantes al responder esta pregunta es hacer una lectura directa y omitir la información que entrega la escala.

Recomendaciones pedagógicas

Comprensión del problema y de la información que entrega

En los tres ejemplos entregados anteriormente se observan dificultades en el primer paso de la resolución de problemas: la comprensión del problema y de la información que entrega. Es frecuente que al resolver problemas los estudiantes presenten dificultades para comprender la situación planteada, la información que entrega el problema y para seleccionar la información que se necesita para resolver el problema.

Dado que los pasos en la resolución de problemas son secuenciales y dependientes entre sí, presentar dificultades para realizar el primer paso tiene consecuencias en la aplicación de los otros pasos y en el resultado que se obtiene.

Para evitar la presencia de este tipo de dificultades, se recomienda que los docentes dediquen tiempo a aplicar estrategias para que sus estudiantes aprendan y ejerciten cómo abordar de manera sistemática la interpretación de una situación problema y cómo extraer toda la información que ella entrega. Para eso, se sugiere incentivarlos a leer detenidamente toda la información entregada y destacar los datos y las relaciones que se entregan. Se sugiere que, en un comienzo, esto se haga a través de preguntas guiadas que sigan siempre un mismo orden lógico, de manera de generar en los estudiantes el hábito de hacerse esas preguntas cada vez que se enfrenten a un problema.

Se sugiere que los docentes refuercen la idea que antes de resolver un problema hay que hacerse las preguntas: ¿qué me están preguntando?, ¿con qué información cuento?, ¿qué información necesito utilizar?

Aprender del error

Cuando se produzca este tipo de error, se recomienda que los docentes indaguen acerca de por qué los estudiantes llegaron a un resultado incorrecto. Se sugiere que a través de preguntas guiadas se ayude a que sea el estudiante quien se dé cuenta de la información que omitió y a reflexionar respecto de por qué cree que la omitió y qué puede hacer a futuro para que ello no le vuelva a pasar.

2.2. Comprensión de los números naturales y las operaciones básicas

Entre 1° y 4° básico se espera que los estudiantes desarrollen el concepto de número y sean capaces de aplicar las operaciones básicas en el ámbito de los números naturales. Estos aprendizajes son de gran relevancia, ya que constituyen el cimiento para aprendizajes relacionados con otros conjuntos numéricos propuestos a lo largo de la trayectoria curricular escolar. Por esta razón, es importante que los docentes generen estrategias para lograr que sus estudiantes comprendan estos números, el significado de las cuatro operaciones básicas dentro de los números naturales y cómo estas se realizan.

Tanto para lograr la comprensión del concepto de número como el cálculo de las operaciones básicas, se sugieren que los docentes trabajen con sus estudiantes aspectos tales como:

- Comprensión de la estructura del sistema de numeración decimal.
- Manejo de vocabulario de la disciplina.
- Comprensión y ejercitación de transformaciones entre unidades, decenas, centenas, etc.
- Comprensión del significado de las operaciones en los números naturales.

Comprensión de la estructura del sistema de numeración decimal

Existen distintos sistemas de numeración que se caracterizan, entre otras cosas, por la cantidad de símbolos que utilizan y por las reglas que permiten construir todos los números válidos.

Los números naturales, así como los números de los otros conjuntos numéricos que se abordan en las Bases Curriculares, utilizan el sistema de numeración decimal o de base 10. Este sistema está formado por 10 símbolos o dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9) que representan cantidades, cuyo valor dependerá de la posición que ocupan dentro del número. De esta manera, por ejemplo, en el número 235, el dígito 3 tiene valor 30, ya que ocupa la posición de las decenas. De acuerdo con esta estructura, al cambiar el orden de los dígitos de un número, se modifica el valor posicional de ellos y, por ende, el número ya no es el mismo.

Otra característica de este sistema de numeración es que la equivalencia entre las posiciones que conforman un número se realiza en base 10. De esta manera, una decena equivale a 10 unidades, una centena equivale a 10 decenas, y así sucesivamente. Lo mismo ocurre en la dirección contraria en la que 10 unidades corresponden a una decena y así sucesivamente.

Los estudiantes, además de comprender que los números naturales se forman por 10 dígitos que tienen diferente valor, dependiendo de la posición que ocupan, deben comprender que la representación simbólica de un número natural está dada por su cantidad de unidades, de decenas, de centenas, de unidades de mil, de decenas de mil, etc.; que la posición de las unidades siempre está en la derecha del número, seguida por la de las decenas, la de las centenas, etc., y que al "leer" un número, siempre se comienza por mencionar la posición que tiene el mayor valor posicional (es decir, la que se encuentra en la posición de la izquierda).

Como consecuencia de lo anterior, se debe comprender que la estructura de formación de estos números se basa en la adición y, por tanto, cada número se puede descomponer "aditivamente" considerando el valor posicional de sus dígitos. Así, el número "trescientos cuarenta y dos" está formado por trescientos, más cuarenta, más dos y el número 218 está formado por 200 + 10 + 8.

Los números naturales poseen una estructura aditiva y se forman usando 10 dígitos cuyo valor depende de la posición en la que se encuentren. Conocer la estructura aditiva de formación de los números permitirá comprender mejor cómo construirlos y cómo operar con números naturales. Una ejercitación intensa usando la composición y descomposición aditiva en conjunto con los términos unidades, decenas, centenas unidades de mil proporcionarán a los alumnos seguridad en el cálculo.

Manejo de vocabulario de la disciplina

Para resolver diferentes problemas en los que se requiere aplicar la estructura del sistema de numeración decimal, es necesario que los estudiantes manejen algunos términos que se usan con frecuencia. Lo anterior, debido a que la representación simbólica de los números es parte del lenguaje matemático y para utilizarla correctamente se precisa saber interpretar cada uno de los elementos que la componen.

En primer lugar, los estudiantes necesitan saber que cuando se les pregunta por el valor de un dígito dentro de un número, se les está preguntando por su **valor posicional**; es decir, por la cantidad que se le asocia considerando la posición que ocupa dentro del número. Es frecuente que estudiantes ante preguntas del tipo "¿qué valor tiene el dígito 2 en el número 21?" respondan "2", lo anterior debido a que no comprenden que el valor de un dígito dentro de un número corresponde a su valor posicional. Por eso es importante que los docentes hagan referencia explícita al valor posicional cuando realicen ejercicios de este tipo. Formular correctamente preguntas relativas al "valor posicional" es fundamental para poder resolver problemas que se asocian a la estructura del sistema de numeración decimal.

Además, los estudiantes deben conocer los términos que designan cada una de las posiciones que conforman un número; estos son: **unidad**, **decena**, **centena**, **unidad de mil**, **decena de mil**, etc. Para ello, deben saber sus nombres y su abreviación.

Junto con lo anterior, los estudiantes deben comprender que el componente básico del sistema de numeración decimal es la "unidad", que esta se representa con el símbolo "U", y que una unidad equivale a 1. Por último, deben comprender que diez unidades conforman una "decena" (D), que diez decenas conforman una "centena" (C) y así sucesivamente.

Existe una relación entre el nombre de cada posición y el valor que se le asocia. Además, por tratarse de un sistema decimal, los valores asociados a cada posición corresponden a valores de la potencia 10.

Posición	Valor asociado	Potencia 10
Unidad	1	10^0
Decena	10	10^1
Centena	100	10^2
Unidad de mil	1 000	10^3
Decena de mil	10 000	10^4
Centena de mil	100 000	10^5
...	...	...

Manejar los términos “unidades”, “decenas”, “centenas”, etc., sirve para descomponer los números en su forma extendida.

Por ejemplo, permite llegar a plantear que el número 3 172 está compuesto por: 2 unidades (2U), 7 decenas (7D), 1 centena (1C) y 3 unidades de mil (3UM); es decir: 2U + 7D + 1C + 3UM.

Y que ello también se puede expresar como: 2 x 1 + 7 x 10 + 1 x 100 + 3 x 1 000

La descomposición de los números en su forma extendida es de gran utilidad para la posterior comprensión acerca de cómo se realizan las operaciones básicas y de dónde surgen los algoritmos y los canjes.

Además, los estudiantes deben manejar los términos: “adición”, “sustracción”, “multiplicación”, “división”, “más”, “menos”, “por”, “sumar”, “restar”, “sumandos”, “resultado”, “minuendo”, “sustraendo”, “diferencia”, “factores”, “producto”, “dividendo”, “divisor” y “cociente”.

■ Comprensión y ejercitación de transformaciones entre unidades, decenas, centenas, etc.

Una vez que se comprende que el componente básico del sistema de numeración decimal es la “unidad”, que una unidad equivale a 1, que diez unidades conforman una “decena”, que diez decenas conforman una “centena”, etc., los estudiantes deben comprender la aplicación de ello en las transformaciones entre valores posicionales. Para ello, han de darse cuenta de que cada vez que se quiere transformar un valor posicional en el inmediatamente menor, se debe reemplazar dicho valor por 10 elementos de valor posicional anterior. Así, deben comprender que si se quiere transformar una decena en unidades se debe reemplazar la decena por 10 unidades, asimismo, al transformar 3 unidades de mil en centenas, se obtiene 30 centenas.

Para lograr estos aprendizajes, se sugiere comenzar con la representación concreta, pictórica y luego simbólica de distintas cantidades, hasta el 10 000. Esto debe ser trabajado en forma oral, concreta y escrita, aprovechando experiencias de la vida diaria de cada estudiante. Transitar entre los tres niveles de representación (concreta, pictórica y simbólica) podría ayudar a la consolidación de estos aprendizajes.

Una vez que hayan adquirido la noción simbólica de los números, se recomienda reforzar la idea de valor posicional a partir de la comparación de dos números que tengan los mismos dígitos, pero en distinto orden. A través de un análisis (verbal o con material concreto) se puede lograr que sean los estudiantes quienes comprendan que ambos números no tienen el mismo valor y que la posición de los dígitos determina el valor del número.

Un caso particular que hay que modelar, ejemplificar y analizar con los estudiantes es cuando la representación de un número, de acuerdo con sus valores posicionales, no tiene la presencia explícita de algún "valor posicional". Para ello, se sugiere enfrentar a los estudiantes a preguntas que los hagan darse cuenta de estos casos y reflexionar en torno a ellos para llegar a una respuesta.

Además, es conveniente explicitar a los estudiantes que, por lo general, en la representación de la descomposición aditiva de un número se entrega información de la cantidad de unidades, decenas, centenas, etc. que lo componen y se omiten aquellas posiciones en las que la cantidad es igual a cero. Por ejemplo, el número 4605 tiene 4 unidades de mil, 6 centenas, 0 decenas y 5 unidades o simplemente tiene 4 unidades de mil, 6 centenas y 5 unidades.

Para la comprensión del sistema de numeración decimal y del valor posicional se sugiere realizar variados ejercicios empleando diferentes recursos, desde los concretos y pictóricos (como los bloques multibase y la tabla posicional), hasta los más abstractos (como las representaciones en U, D, C, UN, etc.). Es importante que los estudiantes transiten entre una representación y otra, dentro del ámbito numérico correspondiente y que sean capaces de escribir o dibujar las representaciones de distintos números, escribir en palabras como se leen, leerlos a partir de cualquiera de sus representaciones, descomponerlos en forma aditiva y comparar representaciones. Se sugiere que dentro de los ejercicios que se les presente a los estudiantes, se incluyan situaciones que favorezcan la comprensión de las transformaciones entre valores posicionales, ya que esta es clave para la comprensión del sistema de numeración y, posteriormente, para poder realizar operaciones con "reserva" o canje.

Una vez que se han comprendido los conceptos asociados al valor posicional, se sugiere que los estudiantes ejerciten las distintas representaciones de los números, comunicando y justificando los procedimientos empleados. Cuando logran explicar la validez de un procedimiento se puede suponer que el aprendizaje se está consolidando. En general, la experiencia y la literatura han demostrado que si no se comprende lo que se hace, se corre el riesgo de que el aprendizaje sea memorístico, mecánico y rígido; y que no permita establecer conexiones con otros conceptos, integrar contenidos o transferir el conocimiento a contextos diferentes.

Comprensión del significado de las operaciones en los números naturales

Las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división en los números naturales son ampliamente utilizadas para representar situaciones de la vida diaria y resolver problemas cotidianos. Comprender el significado de estas operaciones en los números naturales es fundamental para poder utilizarlas correctamente en este conjunto numérico y para poder transferirlas a otros conjuntos.

En un inicio, estas operaciones se vinculan con situaciones simples, por ejemplo, la de adición se asocia con avanzar, juntar, agregar; la de sustracción, con quitar y retroceder; la de multiplicación, con agregar reiteradamente la misma cantidad; y la de dividir, con repartir en partes iguales o separar en partes iguales. Se recomienda que los estudiantes puedan ejercitar este tipo de operaciones en situaciones concretas, con material didáctico y usando representaciones pictóricas.

Una vez que los estudiantes se han familiarizado con el significado de las palabras relacionadas con las operaciones básicas, se sugiere que se presenten a los estudiantes problemas en los que se muestren dos situaciones que utilicen las mismas palabras, pero en contextos en los que signifiquen cosas distintas y guiar la reflexión respecto de qué significa cada una de ellas, cuál es la operación que permite representarlas y en qué se fijaron ellos para llegar a dicha operación. También ayuda realizar de manera concreta las acciones propuestas en la actividad o explicar las acciones con sus propias palabras. Para ello, se recomienda pedir a los estudiantes que modelen las situaciones y que expliquen el modelo seleccionado.

Por ejemplo:

- Tengo 8 lápices y **regalo** 2 de ellos, ¿cuántos lápices me quedan?
- Tengo 8 lápices, **regalo** 3 y luego regalo 2, ¿cuántos lápices regalé?

Además de comprender el significado de las operaciones, los estudiantes deben comprender cómo se realizan y por qué se realizan de esa manera.

En el caso de la adición, por ejemplo, tras haber comprendido el valor posicional y sus implicancias, los estudiantes podrán comprender por qué para sumar dos números se deben alinear las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, las centenas con las centenas, etc. y cómo el resultado de ello es que se alinea a la derecha.

En la sustracción rige el mismo principio que para la adición: se restan unidades de unidades, decenas de decenas y centenas de centenas, pero para esta operación se requiere comprender elementos adicionales. En primer lugar, se debe distinguir claramente cuál es el minuendo y cuál es el sustraendo, y luego se deben restar los valores del sustraendo a sus respectivos valores del minuendo. Además, se presenta una dificultad adicional cuando al realizar la sustracción paso a paso algunas de las cifras del sustraendo presentan un valor mayor a la respectiva del minuendo.

En el caso de la multiplicación de un número de varias cifras por uno de una sola cifra, es necesario comprender que el algoritmo se basa en la descomposición aditiva del primer factor y luego la multiplicación de cada una de estas cifras por el segundo factor; y que el resultado corresponde a la suma de todos los productos obtenidos. Este procedimiento se hace extensivo para el caso de la multiplicación de dos factores de más de una cifra; se descomponen ambos y se multiplican todas las cifras de uno de ellos por todas las del otro.

El algoritmo de la división, al igual que en el caso de la multiplicación, se explica por la descomposición aditiva del dividendo, y luego la división de cada una de las cifras que resultaron de esta descomposición (del dividendo) por el divisor y finalmente, la adición de los cocientes parciales para obtener el total.

Ejemplos de errores asociados a la comprensión de los números naturales y su operatoria:

Ejemplo de pregunta de adición de números naturales con distinta cantidad de cifras

Ejemplo 2. *Pregunta de adición de números naturales con distintas cantidades de cifras*

Marcia tiene 112 bolitas rojas, 43 bolitas amarillas y 103 bolitas azules.
¿Cuántas bolitas tiene Marcia en total?

✗	645	Alinea las cifras sin considerar su valor posicional al sumar.
✓	258	Respuesta correcta.

El ejemplo 2 corresponde a un problema rutinario que se resuelve a través de una adición sin "reserva". Para responder correctamente a esta pregunta, los estudiantes deben ser capaces de sumar tres cantidades que poseen distinto número de cifras. Para ello, requieren saber que deben sumar las unidades, luego sumar las decenas y luego sumar las centenas. El error más frecuente que se observa es no considerar el valor posicional al sumar y, por tanto, sumar centenas con decenas y decenas con unidades obteniendo como resultado 645.

Recomendaciones pedagógicas

A continuación, se entregan algunas recomendaciones pedagógicas que se sugiere tener en consideración durante el proceso de enseñanza aprendizaje de la adición y sustracción de números naturales para fortalecer la apropiación de los conceptos por parte de los estudiantes, ayudarles a comprender la relación entre estas operaciones y los procedimientos empleados.

Comprensión de que los números naturales poseen una estructura aditiva

Para comprender cómo se realizan las operaciones de adición y sustracción en los números naturales es necesario que los estudiantes primero comprendan que los números poseen una estructura aditiva en la que, por lo general, en el nombre del número se indica la cantidad de unidades, de decenas, de centenas, etc. que lo conforman.

Esta estructura queda claramente visible en números como "dieciséis", "veinticinco", "treinta y cuatro", etc. Se sugiere usar los nombres de los números para reforzar la comprensión de que estos están formados de manera aditiva y ejercitar la lectura y escritura de los números para que los estudiantes internalicen esta estructura. Además, decir los números oralmente podría facilitar que los estudiantes tomen conciencia de alinear los números antes de operar con ellos.

Adición en los números naturales

La adición en los números naturales se aborda desde niveles muy tempranos de la enseñanza. Generalmente, esta operación se asocia con situaciones concretas que implican avanzar, agregar, juntar, etc., para luego transferirla a situaciones en las que se opera con representaciones simbólicas de las cantidades.

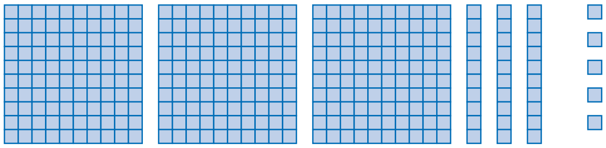
Para facilitar el tránsito desde la aplicación concreta de la adición hasta su aplicación abstracta es importante que los estudiantes tengan experiencias de aprendizaje que les permitan trabajar la adición de manera concreta, para luego pasar a experiencias en que las trabajen a nivel simbólico.

La representación concreta de un número está dada por la cantidad que este representa; por ejemplo, el número 12 estará representado de manera concreta por doce elementos. En la representación concreta de un número cada elemento corresponde a una unidad, por ello, al sumar, se reúnen todos los elementos (que poseen valor 1) y se puede calcular el total a través de conteo.

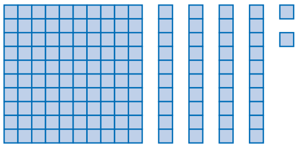
En la representación simbólica, se utilizan símbolos que representan cantidades asociadas a diferentes valores posicionales: la cantidad de unidades, decenas, etc. que componen el número. Por ello, al sumar dos representaciones simbólicas de números, no es correcto seguir el mismo procedimiento que se utiliza para sumar representaciones concretas, ya que no todos los dígitos poseen el mismo valor. En este caso, lo que corresponde es descomponer los números en unidades, decenas, etc. y realizar el procedimiento de adición para cada valor posicional.

Para favorecer la comprensión de la adición, se sugiere comenzar con la representación de esta operación utilizando recursos didácticos como bloques multibase y tabla posicional.

Por ejemplo, al sumar 335 + 142 se puede representar cada sumando de esa adición con bloques multibase señalando cuántos bloques de cada tipo hay en cada sumando y luego, componiendo la cantidad total que representan.



= 3C + 3D + 5U



= 1C + 4D + 2U

Ello, además, se puede registrar en la tabla posicional como:

	Centenas	Decenas	Unidades
	3	3	5
	1	4	2
Total	**4**	**7**	**7**

Una vez que se ha ejercitado adición utilizando este recurso didáctico, se sugiere hacer ejercicios directamente sobre la tabla posicional, por ejemplo, 235 + 147:

	Centenas	Decenas	Unidades
	2	3	5
	1	4	7
Total	**3**	**7**	**12**

En este ejercicio, las 12 unidades que se obtuvieron deben ser reagrupadas (en 1 decena 2 unidades) y ello se puede indicar anotando en la tabla las unidades que quedaron (2) en la línea del total de la suma y la decena reagrupada en la primera celda correspondiente a las decenas, de la siguiente manera:

	Centenas	Decenas	Unidades
		1	
	2	3	5
	1	4	7
Total	**3**	**8**	**2**

Este recurso permitirá a los estudiantes resolver las operaciones teniendo en cuenta la forma en que se deben ir ordenando los dígitos de acuerdo con su valor posicional.

La tabla posicional es un recurso muy efectivo en la comprensión del sistema de numeración decimal y sobre todo en la comprensión de las operaciones en los números naturales. Es importante que se utilice a través de variados ejercicios tanto de representación numérica como de operaciones. Al hacerlo, los estudiantes deben comprender en cada momento el significado de las respectivas columnas y qué quiere decir que el dígito de un número esté ubicado allí. También deben comprender cómo se relacionan unas columnas con otras y aplicar esos conocimientos en la resolución de operaciones y problemas.

Además, se sugiere presentar variados ejercicios de sumas verticales cuyos sumandos tengan distinta cantidad de cifras y que los estudiantes expliciten y expliquen sus procedimientos. En estos casos, se sugiere que los docentes incentiven a los estudiantes a fabricar su propia tabla posicional para que se aseguren de respetar los valores posicionales de los dígitos que componen los sumandos.

Además, se recomienda que los docentes trabajen el cálculo mental. En general, las técnicas del cálculo mental se basan en descomposiciones de los números que facilitan el cálculo en una determinada situación. Es necesario proponer una variedad de ejercicios y orientar a los estudiantes a que experimenten distintas formas de descomponer los números hasta lograr que se den cuenta, por ellos mismos, de cuál es la forma más práctica, conveniente y efectiva en cada situación.

Por último, se recomienda que cuando se trabaje con el algoritmo, se refuerce constantemente la asociación de los dígitos con su valor posicional, como se ha desarrollado antes en este documento, y el significado de los pasos que se están realizando.

Necesidad de recurrir al uso de "reserva"

Un concepto importante que se requiere manejar para resolver adiciones utilizando el algoritmo es el de "reserva". Este concepto demanda la comprensión profunda del sistema de numeración decimal, del significado de "agrupar" términos, y de que cada "agrupación" de ellos da origen a un nuevo término con una nueva posición en el sistema.

La "reserva" es necesaria cuando se aplica el algoritmo en situaciones en las que, al sumar dos dígitos de un mismo valor posicional, su resultado sea mayor o igual a 10 si se trata de unidades, de 100, si se trata de decenas, etc.

Por ejemplo:

78 = 7D + 8U = 70 + 8

15 = 1D + 5U = 10 + 5

78 + 15 = (70 + 10) + (8 + 5) = 80 + 13 = **8D** + **13U**

Al analizar lo que representa 8D + 13U, se observa que 13U corresponde a 13, es decir 1D + 3U, por lo tanto, corresponde a 8D + **1D** + 3U. La decena que formaba parte del resultado obtenido al sumar las unidades debe ser agregada a la posición de las decenas y, por tanto, cuando se aplica el algoritmo debe "guardarse" como "reserva" para adicionársela al resultado que se obtenga al sumarse las decenas.

El uso de la "reserva" se utiliza para resumir el proceso de sumar los números manteniendo la lógica que subyace a la adición. Se sugiere abordar la comprensión de la "reserva" y su ejercitación usando numerosos y variados ejemplos.

Aprender del error

Tal como se desprende del ejemplo 2, una cantidad importante de estudiantes comete errores al sumar números naturales con distinta cantidad de cifras, pues no consideran los valores posicionales y alinean a la izquierda. Se sugiere que, cuando ello ocurra, los docentes aprovechen la instancia para que los estudiantes aprendan.

En estos casos, se recomienda orientar a los estudiantes a que se den cuenta por ellos mismos de qué es lo que implica ordenar las cifras como lo hicieron, en términos de qué estarían sumando en realidad (en este caso, centenas con decenas, decenas con unidades). Para ello se les pueden hacer preguntas como:

Felipe necesita resolver la siguiente adición:

$$\boxed{112 + 43}$$

Para resolverla, Felipe hace lo siguiente:

$$\begin{array}{r} 112 \\ +\ \ 43 \\ \hline 542 \end{array}$$

¿Qué está haciendo Felipe al resolver la adición de esa manera? ¿Está sumando lo que necesita sumar? ¿Por qué no?

¿En qué no se está fijando Felipe?

¿Qué le dirían ustedes a Felipe para que no volviera a cometer este error si tiene que resolver otra adición?

Nuevamente aquí se hace patente la necesidad de comprender el significado del valor posicional de cada dígito y para ello se sugiere la ejercitación y profundización a través del uso de la tabla posicional, como se ha desarrollado anteriormente en este documento. El uso de la calculadora para comprobar el resultado de la adición, puede ser otra estrategia que permita evidenciar el error.

Ejemplo de pregunta de multiplicación de números naturales

Ejemplo 3. *Pregunta de multiplicación de números naturales*

¿Cuál es el resultado de $472 \cdot 3$?

✗	1 326	Registra como reserva las unidades en vez de las decenas.
✓	1 416	Respuesta correcta.

El ejemplo 3 corresponde a una multiplicación de dos números naturales. Para realizar correctamente esta multiplicación, los estudiantes deben comprender que al multiplicar un número por un factor, se debe multiplicar el valor de cada dígito del número por el de ese factor. Además, si el estudiante decide resolver la multiplicación aplicando el algoritmo, debe saber en qué posición se registran los dígitos de los números que va obteniendo, para lo que debe tener claridad del valor de cada uno.

Es probable que los estudiantes que llegaron al resultado 1 326 hayan registrado el producto de manera invertida. Este tipo de error es común cuando se aplican los algoritmos de manera memorística sin comprender su lógica subyacente.

En este caso, la base que sustenta este algoritmo es la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición. Por esta propiedad, la multiplicación de un número es equivalente a la multiplicación del valor de cada uno de sus dígitos por el factor.

En el caso del ejemplo 3, corresponde a la multiplicación del valor de cada uno de los dígitos del número 472 por el factor 3.

Dado que 472 = 400 + 70 + 2, se procede de la siguiente manera:

a. 472 x 3 = 400 x 3 + 70 x 3 + 2 x 3,

b. 400 x 3 + 70 x 3 + 2 x 3 = 1 200 + 210 + 6,

c. 1 200 + 210 + 6 = 1 000 + 200 + 200 + 10 + 6,

d. 1 000 + 200 + 200 + 10 + 6 = 1 000 + 400 + 10 + 6, y

e. 1 000 + 400 + 10 + 6 = 1 416

Al resolver esta multiplicación usando el algoritmo, se realiza el mismo procedimiento, pero de manera resumida:

a. Se multiplica el tres por el dígito de las unidades (2) y el resultado (6) se registra en la posición de las unidades.

b. Se multiplica el tres por el dígito de las decenas (7) y el resultado (21) se registra en la posición de las decenas. Dado que el resultado es 21 decenas, y solo se puede anotar un dígito en la posición de las decenas, el 21 se descompone en 2 centenas y 1 decena, registrando las dos decenas como “reserva” para sumarlas en la posición de las centenas.

c. Se multiplica el tres por el dígito de las centenas (4) y el resultado (12) se registra en la posición de las centenas. Dado que el resultado es 12, se descompone en 1 unidad de mil y dos centenas, registrando ambos valores en la posición que les corresponde.

d. Finalmente, se considera la “reserva” que se registró en la posición de las centenas y se suma al valor obtenido para esa posición, de manera de llegar al resultado final.

Al igual que para resolver muchas adiciones, para resolver esta multiplicación se requiere manejar el concepto de "reserva". Los estudiantes que respondieron erróneamente este problema, si bien realizaron las multiplicaciones en forma correcta, determinaron mal la "reserva", invirtiendo el orden del resultado parcial. En este caso, es importante incentivar a que los estudiantes reflexionen respecto de qué significa multiplicar 7 (decenas) por 3 (unidades); si el resultado de esa multiplicación da origen a una cifra con valor posicional mayor, y cómo se registra esa nueva cifra cuando la operación que se está realizando incluye además la multiplicación del mismo 3 por otra centena (4).

En el proceso de aplicar un algoritmo en forma memorística se va perdiendo el sentido y la comprensión de lo que se está ejecutando; por ello es importante que el docente refuerce en sus estudiantes la necesidad de comprender el algoritmo.

Recomendaciones pedagógicas

Es importante comprender que el algoritmo de la multiplicación de números naturales se sustenta en la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición y corresponde a una simplificación que resulta de descomponer el primer factor (en este caso el 472) en cifras según su valor posicional (400 + 70 + 2) y multiplicar cada una de esas cifras por el segundo factor (3), para luego sumar esos resultados.

Para que los algoritmos sean internalizados por los estudiantes y no se pierda el sentido de lo que se está haciendo en cada uno de sus pasos, es importante que los docentes expliquen la validez de los procedimientos que se usan y que los estudiantes también puedan ir verbalizando por qué se realiza cada paso y lo que estos implican. Para ello, se sugiere reforzar las siguientes ideas o nociones al introducir y explicar el algoritmo de la multiplicación:

Necesidad de contar con estructuras que permitan multiplicar cantidades grandes

La primera forma en que los estudiantes se aproximan a la multiplicación es asociándola con adición reiterada. Los estudiantes aprenden a representar la multiplicación y a resolverla de manera concreta o pictórica sumando reiteradas veces una misma cantidad. Si bien esto es posible cuando las cantidades a multiplicar son pequeñas, a medida que se avanza en la extensión del ámbito numérico, se va haciendo cada vez menos factible reemplazar la multiplicación por adiciones reiteradas.

Para introducir el algoritmo de la multiplicación, se sugiere enfrentar a los estudiantes a problemas de multiplicación en los que resolverlos usando la adición reiterada resulte largo y discutir con ellos la necesidad de contar con procedimientos simplificados que permitan resolver operaciones que involucran cantidades "grandes". Reforzar esta idea contribuye a que los estudiantes valoren la utilidad del algoritmo y que comprendan que este mantiene la lógica que subyace a la adición.

El algoritmo de la multiplicación se sustenta en la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición

Una segunda idea a reforzar es que el algoritmo de la multiplicación se sustenta en el significado de esa operación y en la propiedad distributiva de ella respecto de la adición. Para ello, se sugiere que se realicen ejercicios prácticos en los que los estudiantes puedan experimentar que se llega al mismo resultado multiplicando un número por un factor que multiplicando la descomposición aditiva de dicho número por el mismo factor.

Por ejemplo:

Al multiplicar 12 x 3 usando suma reiterada se obtiene 12 + 12 + 12 = 36 y

Al multiplicar (10 + 2) x 3 se obtiene 30 + 6 = 36

Se puede repetir el trabajo con ejemplos sencillos como el anterior hasta que los estudiantes se sientan seguros de que son dos formas de llegar al mismo resultado y luego extenderlo a otros ejemplos.

Valor posicional al aplicar el algoritmo y noción de "reserva" en la multiplicación

Aplicar el algoritmo para resolver multiplicaciones como la del ejemplo 3 requiere que los estudiantes sepan cómo ir registrando los valores que obtienen y que comprendan el significado de la "reserva" y sepan cómo registrarla.

En lo que respecta al registro de los valores que se obtienen, los estudiantes deben comprender que al multiplicar la cifra de las unidades de un número, el resultado se registra en la posición de las unidades; que al multiplicar la cifra de las decenas, el resultado se anota en la de las decenas y así sucesivamente.

Para favorecer esta comprensión, se sugiere que se muestre a los estudiantes la forma de resolver multiplicaciones usando descomposición:

$$23 \times 2 = (20 + 3) \times 2 = (20 \times 2) + (3 \times 2) = 40 + 6 = 46$$

y que luego se les muestre que el algoritmo resume los pasos registrando directamente el resultado (lo que adquiere importancia cuando se realizan multiplicaciones por factores con más de una cifra).

En lo que respecta a la "reserva", al igual que con la adición, esta se hace necesaria cuando se aplica el algoritmo y los productos parciales que se obtienen son mayores o iguales que 10, 100, 1 000, según corresponda.

Por ejemplo:

162 x 3 = 3 x 2 + **3** x **60** + 3 x 100 = 6 + **180** + 300

En el caso de 3 x 2 el resultado es 6, un número compuesto por 6 unidades. Al ser este producto parcial menor que 10, se puede registrar directamente en la posición de las unidades sin necesidad de recurrir a la "reserva".

En el caso del 3 x 60 el resultado es 180, un número compuesto por 0 unidades, 8 decenas y 1 centena. Este número no puede registrarse directamente en la posición de las decenas y requiere considerar una reserva en la posición de las centenas. De esta manera se registran las 8 decenas en la posición de las decenas y la centena se registra como "reserva" en la respectiva posición.

En el caso de 3 x 100 el resultado 300, un número compuesto por 0 unidades, 0 decenas y 3 centenas y, por tanto, se puede registrar directamente en la posición de las centenas agregándole la centena registrada como "reserva".

Se sugiere abordar la comprensión de la "reserva" y su ejercitación usando numerosos y variados ejemplos de multiplicación y vincularlos con situaciones de adición en las que se usa la "reserva".

Aprender del error

Tal como se desprende del ejemplo 3, una cantidad importante de estudiantes comete errores al tener que aplicar la "reserva". Esto ocurre tanto en el caso de la multiplicación como en el de la adición. Se sugiere que, cuando ello ocurra, los docentes aprovechen el error para recordar a los estudiantes el origen de la "reserva", qué es lo que esta significa y cómo esta se realiza. Para ello, se sugiere usar ejemplos como los descritos anteriormente.

Ejemplo de pregunta de sustracción con números naturales

Ejemplo 4. *Pregunta de sustracción con números naturales*

¿Cuál es el resultado de la siguiente sustracción?

$$\begin{array}{r} 431 \\ \underline{-\ 183} \end{array}$$

✗	352	Resta el dígito menor al mayor en cada valor posicional, sin considerar el minuendo y el sustraendo.
✓	248	Respuesta correcta.

El ejemplo 4 corresponde a una sustracción de dos números naturales de igual cantidad de cifras, en donde se presenta la dificultad de que en algunas posiciones el minuendo es menor que el sustraendo.

Esta situación hace que no se pueda realizar la sustracción de manera directa y se deban realizar transformaciones de unidades.

El error más frecuente que se observa es que, en vez de aplicar el algoritmo, los estudiantes asumen que la sustracción consiste en que para cada valor posicional, se debe restar siempre el dígito de menor valor al de mayor valor. Este error muestra problemas en la comprensión del significado de la sustracción.

Recomendaciones pedagógicas

Frente a situaciones como la del ejemplo 4, es central que los estudiantes sean capaces de darse cuenta de que no siempre es posible realizar sustracciones directas, ya que a veces es necesario hacer transformaciones basadas en las equivalencias entre valores posicionales.

La sustracción no es una operación conmutativa

Para lograr la comprensión de la sustracción, los estudiantes deben realizar actividades que les permitan entender, en primer lugar, que la sustracción, a diferencia de la adición, no es una operación conmutativa; esto significa que no se pueden intercambiar los términos que se están restando. En el caso de la adición, se puede operar con dos o más sumandos y el orden en que ellos se presenten no altera el resultado de la adición porque este es único; sin embargo, en la sustracción, cambiar el orden altera el resultado.

La sustracción se efectúa entre dos términos o cantidades que son el minuendo y el sustraendo. El resultado de la sustracción es la diferencia. En 4° básico, en el ámbito numérico en que se desenvuelven, los estudiantes pueden determinar cuándo es posible restar una cantidad a otra y cuándo no. En niveles superiores aprenderán que esta operación siempre será posible.

En el ejemplo presentado, si bien los estudiantes restaron unidades con unidades, decenas con decenas y centenas con centenas, cometieron el error de restar siempre el dígito menor al mayor, sin considerar a cuál de los términos (minuendo o sustraendo) pertenecía ese dígito.

La adición y la sustracción son operaciones inversas

Además de comprender que la sustracción no es una operación conmutativa, los estudiantes deben ser capaces de reconocer que la adición y la sustracción son dos operaciones “inversas”, lo que implica que entre ellas existe una relación que hace que una sea lo opuesto de la otra. La noción de que estas operaciones son inversas aparece de manera intuitiva en cursos tempranos y debe ser sistematizada durante el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Se sugiere guiar a los estudiantes para que sean capaces de visualizar que, si a partir del resultado de una adición se quiere volver a uno de los sumandos, se debe aplicar la sustracción, por lo tanto, resulta natural que sus procedimientos también se relacionen en esa forma. Esta es una estrategia que se puede usar para que los estudiantes comprueben los resultados que obtienen al realizar sustracciones (o adiciones).

Descomponer unidades de mayor valor en unidades de menor valor para la sustracción

El algoritmo de la adición señala: “sume unidades con unidades”, en el caso de la sustracción, este debe ser ajustado de la siguiente manera: “reste las unidades del sustraendo a las unidades del minuendo, las decenas del sustraendo a las decenas del minuendo, etc.”, de manera de dejar claro que la sustracción no es conmutativa.

Además, los estudiantes deben aprender a enfrentar situaciones en las que al usar el algoritmo, en alguna de las posiciones, el minuendo es menor que el sustraendo. Para ello, los estudiantes deben utilizar sus conocimientos respecto del sistema de numeración decimal y la relación que existe entre unidades, decenas, centenas, etc.

Se sugiere que, como primera aproximación, los estudiantes se enfrenten a situaciones de sustracción con canje, en situaciones de dinero o en juegos en los que se usen sistemas de fichas con equivalencia de base 10, las que se puedan canjear. Posterior a ello, se recomienda pasar a realizar sustracciones de manera simbólica.

Por ejemplo, si se hace la siguiente sustracción 75 - 8 y se realiza de manera directa término a término, aparece la dificultad de que, dentro de los números naturales, a las 5 unidades del minuendo no se le pueden restar las 8 unidades del sustraendo. Si la situación fuese restarle 8 a 5, se obtendría como resultado un número negativo (-3); sin embargo, no se está solicitando hacer esa sustracción sino 75 - 8. Por lo tanto, al considerar las cantidades totales, el minuendo es mayor que el sustraendo y el resultado será un número natural.

En este caso, luego de que los estudiantes identifican que “no es posible” (dentro del conjunto de los números naturales), restar directamente 8 al 5, deben proceder a canjear una decena para poder continuar.

A partir de este mismo ejemplo se puede fortalecer la comprensión de este proceso, mostrando cómo se realiza la sustracción usando la estrategia de descomposición:

- el número 75 corresponde a 70 + 5, y
- el número 8 corresponde a 8
- Entonces, la sustracción corresponde a 70 + (5 - 8)

Dado que el 5 correspondiente a las unidades del minuendo es menor que el 8 correspondiente a las unidades del sustraendo, se procede a expresar el minuendo de manera que se puedan realizar las restas, esto es:

$$75 = 60 + 15$$

Así, la sustracción queda de la siguiente manera:

$$60 + (15 - 8)$$

Y puede ser resuelta término a término.

Una vez que se comprende la lógica subyacente, se puede resumir este proceso en el algoritmo.

Aprender del error

Tal como se desprende del ejemplo 4, una cantidad importante de estudiantes presenta errores al restar cantidades en las que en alguno de los valores posicionales la cifra del minuendo es menor a la del sustraendo. Se sugiere que, cuando ello ocurra, los docentes aprovechen el error para reforzar el significado de la sustracción y que esta no es una operación conmutativa.

Se sugiere que los docentes aprovechen este error para guiar conversaciones entre los estudiantes en las que se argumente por qué la sustracción no es una operación conmutativa. Para ello se pueden usar preguntas del tipo: ¿Es lo mismo si yo tengo 10 lápices y me quitan 2 que si yo tengo 2 lápices y me quitan 10 lápices? ¿Por qué no es lo mismo?

Ejemplo de pregunta de división con números naturales

Ejemplo 6. *Pregunta de división con números naturales*

¿Cuál es el resultado de 84:2?

✗	44	Divide la cifra con mayor valor posicional del dividendo por el divisor y luego copia la cifra restante del dividendo.
✓	42	Respuesta correcta.

El ejemplo 6 corresponde a una división exacta de un número natural de dos cifras por uno de una cifra. El error más frecuente que se observa en el ejemplo 6 es aplicar el algoritmo de manera incorrecta al no dividir ambos valores posicionales del número 84 en 2 sino solamente el de las decenas, y, por lo tanto, obtener como resultado 44.

Recomendaciones pedagógicas

Significado de la división

Para poder resolver ejercicios de división presentados de manera simbólica, los estudiantes deben comprender el significado de la división en los números naturales. Se sugiere introducir esta operatoria en los naturales como aquella que permite repartir en partes iguales o bien reagrupar una cantidad en grupos más pequeños con igual cantidad de elementos.

Se recomienda que en una primera instancia los estudiantes efectúen diversas divisiones utilizando material concreto para que se familiaricen con las acciones de repartir y reagrupar.

Una vez que los estudiantes hayan asociado la operación de división en los naturales con la repartición en partes iguales y la reagrupación en grupos de igual cantidad, se sugiere que se asocie a ambas acciones con el proceso de restar reiteradamente una misma cantidad. Para ello, se recomienda utilizar cantidades pequeñas y trabajar en un inicio con material concreto que les permita llevar a cabo la acción de restar sucesivamente. Cuando se realiza esta acción se debe explicar a los estudiantes que lo que se quiere averiguar es cuántas veces se le puede restar el divisor al dividendo y que, para obtener el resultado de la división, deben registrar cuántas sustracciones hicieron.

La multiplicación y la división son operaciones inversas

Así como la sustracción es la operación inversa de la adición, la división es la operación inversa de la multiplicación. Se sugiere que, a través de variados ejemplos, se introduzca y trabaje esta idea para reforzar la noción de que las operaciones matemáticas se relacionan una con otras.

Se sugiere guiar a los estudiantes para que sean capaces de visualizar que, si a partir del resultado de una multiplicación se quiere volver a uno de los factores, se debe aplicar la división, por lo tanto, resulta natural que sus procedimientos también se relacionan en esa forma. De esta manera, para verificar el resultado de una división, se puede usar la multiplicación y viceversa.

Para favorecer que los estudiantes puedan establecer la relación que existe entre las operaciones en los naturales, se recomienda que se realicen actividades que refuercen la asociación de la multiplicación con la adición, de la adición con la sustracción, de la división con la multiplicación y de la división con la sustracción.

Algoritmo de la división

Al igual que con las otras operaciones básicas, para aplicar correctamente el algoritmo de la división los estudiantes deben comprender qué significa dividir y cómo se divide.

Realizar la división como reparto en partes iguales, reagrupación en grupos de igual cantidad o como resta reiterada es posible solo cuando se está operando con cantidades manejables. Si las cantidades son grandes, el proceso se vuelve largo e inabordable. El algoritmo entrega una herramienta para poder resolver divisiones en ámbitos numéricos para los que no resultan las estrategias antes mencionadas.

Para dividir dos números naturales, en primer lugar, se debe evaluar si la división que se presenta se puede resolver directamente, en un paso, usando las tablas de multiplicación. Por ejemplo, para resolver 72 : 9 bastaría que el estudiante sepa que 9 x 8 = 72 y que, por tanto, 72 : 9 = 8.

En los casos en que no es posible resolver la división directamente utilizando la multiplicación, se aplica el algoritmo.

El algoritmo de la división se basa en la lógica de esta operación y en la descomposición de los números según el valor posicional de sus dígitos. Sigue la misma lógica que el de la multiplicación, pero aplicando la operación inversa:

Por ejemplo, para resolver 84 : 2

- se debe descomponer el dividendo de acuerdo con el valor posicional de sus dígitos

$$84 = 80 + 4$$

- luego se debe dividir cada uno de los componentes resultantes en 2

$$84 : 2 = (80 : 2) + (4 : 2) = 40 + 2$$

- finalmente, se debe componer el resultado sumando

$$84 : 2 = 40 + 2 = 42$$

Una vez que se comprende esta lógica, se sugiere introducir el algoritmo resumido de la división.

Aprender del error

Tal como se desprende del ejemplo 6, una cantidad importante de estudiantes presenta errores al dividir, pues solo dividen la cifra del valor posicional de las decenas y mantienen la cifra de las unidades sin haberla dividido. Se sugiere que, cuando ello ocurra, los docentes aprovechen esta instancia para reforzar el significado de división y el proceso que describe la lógica que subyace a esta operación.

Se sugiere que los docentes utilicen este error para guiar conversaciones entre los estudiantes en las que se vincule el proceso de dividir con el de multiplicar y donde se discuta el efecto que tiene en el resultado "olvidarse" de dividir (o multiplicar) uno de los valores posicionales.

2.3. Comprensión de las fracciones y su representación

El estudio de las fracciones es de gran relevancia dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática puesto que sienta las bases para la adquisición y comprensión de nuevos conocimientos como la extensión de los conjuntos numéricos hacia los números racionales, la comprensión de las proporciones y los porcentajes, entre otros.

Noción de fracción

En los primeros cursos, los estudiantes deben familiarizarse con el concepto de fracción como parte de un todo. Para ello, se recomienda el trabajo con material concreto y con representaciones pictóricas, a partir de las propias experiencias cotidianas, como el reparto o distribución equitativa de un "todo" en una cantidad determinada de "partes iguales" y la relación de cada una de esas "partes" con el "todo".

El paso de la representación pictórica de una fracción a su representación simbólica requiere de la comprensión de los elementos que intervienen en la representación pictórica y que se quieren representar simbólicamente. Para ello, se hace necesario reforzar el significado de fracción mediante la manipulación concreta y la representación pictórica.

Asimismo, la inclusión de las fracciones en el lenguaje cotidiano resulta muy favorable para su comprensión; (un cuarto de, la mitad de, tres cuartos de, etc.), sobre todo si su utilización se relaciona con magnitudes conocidas por los estudiantes y en contextos cotidianos, como por ejemplo, la mitad de los estudiantes, un cuarto de hora, tres cuartos de kilómetro, etc. Se espera que observen que siempre se hace referencia a un "todo" o a un "entero".

Se sugiere que los ejemplos utilizados sean de distinta naturaleza, que abarquen distintos escenarios y contextos, de modo que los estudiantes puedan formarse una idea de lo que es una fracción. Es necesario transitar de lo concreto a lo abstracto sin apresurarse.

Para afianzar el concepto de fracción, se les puede presentar a los estudiantes diversas situaciones que involucran una misma fracción, presentada en contextos diferentes, y pedirles que analicen sus significados; por ejemplo:

"regalé **la mitad** de mi colación"

"regalé **la mitad** de mis bolitas"

"llevo recorrida **la mitad** de la distancia de la escuela hasta mi casa"

"**la mitad** de diez es cinco"

"**la mitad** del público asistente al estadio aplaudía"

"llevo leída **la mitad** del libro"

Y hacerles preguntas como: ¿qué tienen en común los ejemplos anteriores?, ¿cuáles son sus diferencias?, ¿se puede calcular siempre la mitad de algo?, ¿qué se necesita?, ¿se pueden comparar las mitades de elementos diferentes? ¿por qué?

Además, se recomienda presentarles distintas representaciones pictóricas de fracciones para que las observen, las describan e identifiquen en cuántas partes está dividido el entero, cuántas de esas partes están destacadas de alguna forma, cuántas no lo están, y puedan reflexionar respecto de cómo pueden ir registrando esas observaciones.

Por ejemplo, presentar la siguiente representación:

A	**B**		**A**
	A		**C**
B		**A**	

y hacer preguntas como:

• ¿En cuántas partes está dividido el rectángulo de la figura?	En 12 partes
• ¿Cuántas de esas partes están marcadas con **A**?	4 partes
• ¿Cuántas de esas partes están marcadas con **B**?	2 partes
• ¿Cuántas de esas partes están marcadas con **C**?	1 parte
• ¿Cuántas de esas partes están en blanco?	5 partes

Luego, se recomienda que el docente incentive a que los estudiantes reflexionen respecto de qué información se debe dar a una persona que no ha visto la figura para que pueda imaginarse cómo es. Para eso puede usar preguntas del tipo: ¿Es suficiente información decir que 4 partes de la figura tienen una A o que 2 partes de ella tienen una B?, etc. ¿La persona que no está mirando la figura puede hacerse una idea de ella si solo sabe la cantidad de partes que tienen A, B o C?, ¿qué más necesitaría saber?

En estos casos, es importante que el docente haga notar que para dar la información completa se necesitan dos datos: la cantidad total de partes en la que se divide una figura y la cantidad de partes que se quiere describir (4 de 12, 2 de 12, 1 de 12). Además, los estudiantes deben comprender que lo que se está dividiendo es un todo o un entero.

Para ello, se tiene que observar que en cada uno de estos ejemplos hay un "todo" que se ha repartido en partes iguales.

Una vez comprendido el proceso de repartición en partes iguales de un todo, se crea la necesidad de simbolizar ese proceso ya que ese "todo" puede representar una unidad o una colección de elementos.

Representación simbólica de las fracciones

Una vez fijada la idea de lo que es una fracción representada de manera concreta o pictórica es necesario contar con una manera de expresarla utilizando símbolos matemáticos.

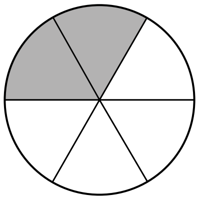
La representación simbólica de una fracción está formada por dos números naturales y una línea horizontal que los separa; dos números naturales que en realidad representan uno solo que no es un número natural. Esta idea es nueva para los estudiantes, que hasta ahora solo estaban familiarizados con los números naturales. En muchos casos, lo natural para los estudiantes resulta considerar a cada uno de estos números por separado y aplicarles, en forma separada, las propiedades que conocen anteriormente de los números naturales, incluyendo, por ejemplo, la adición y el orden.

Para poder representar las fracciones de manera simbólica, los estudiantes deben conocer el nombre que se le da a cada una de las partes que componen una fracción: numerador y denominador. El denominador señala o denomina en cuántas partes se reparte el todo (medios, tercios, cuartos, décimos, etc.); el numerador señala o numera cuántas de esas partes (de las señaladas por el denominador) conforman la fracción.

Ejemplos de errores asociados a la comprensión de las fracciones y su representación

Ejemplo 7. *Pregunta de representación gráfica de una fracción*

La siguiente figura está dividida en partes iguales:



¿Qué fracción de la figura está pintada de gris?

✗	$\frac{2}{4}$	Identifica las partes pintadas de gris como numerador y las sin pintar como denominador.
✓	$\frac{2}{6}$	Respuesta correcta.

Ejemplo 8. *Pregunta de representación de fracción en un contexto*

Miguel tenía 12 huevos y usó 3 para hacer una tortilla.
¿Qué fracción del total de huevos que tenía usó Miguel?

✗	$\frac{12}{3}$	Considera que el primer dato que aparece es el numerador y el segundo, el denominador.
✓	$\frac{3}{12}$	Respuesta correcta.

Los errores que cometen los estudiantes en las preguntas de los ejemplos 7 y 8 se relacionan con la comprensión de las representaciones de las fracciones y de lo que significan el numerador y el denominador.

La pregunta del ejemplo 7 requiere identificar la representación simbólica de una fracción propia que se encuentra representada de manera pictórica. Para contestar correctamente esta pregunta, el estudiante debe comprender el significado de la fracción y qué representa el numerador y el denominador. El error más frecuente en esta pregunta es asociar el numerador con la parte pintada de gris y el denominador con la parte no pintada, obteniendo como resultado 2/4.

La pregunta del ejemplo 8 plantea un problema rutinario en el que los estudiantes deben representar a través de una fracción, una situación cotidiana dada. El error más frecuente que cometen los estudiantes en esta pregunta es no interpretar correctamente el numerador y el denominador e invertirlos.

La pregunta del ejemplo 8 plantea una dificultad adicional a la de la pregunta 7, ya que se trata de un problema rutinario que no entrega una representación pictórica de la fracción. Además, en la pregunta del ejemplo 8 el entero no corresponde a una unidad sino a un conjunto de elementos (12 huevos). Es importante que los estudiantes comprendan que el entero puede ser una unidad o una colección de elementos.

Recomendaciones pedagógicas

Antes de enfrentarse al aprendizaje de las fracciones, los estudiantes han desarrollado la matemática inicial en el ámbito de los números naturales. El hecho de que una fracción se represente mediante dos números puede crear una confusión en los estudiantes, pues hasta ahora los números naturales cumplían para ellos otras funciones. Para comprender las fracciones, deben comprender que un par de números, ubicados con una línea horizontal de por medio, van a representar una parte y un todo.

Para lograr la comprensión de la representación simbólica de una fracción se requiere que los estudiantes hayan transitado por el trabajo con material concreto y con representaciones pictóricas de ellas.

Se recomienda avanzar paso a paso en este camino, primero con material concreto suficiente para asegurar la comprensión de la idea de fracción o parte de un todo, distinguiendo las "partes iguales" en las que se divide el todo; y luego establecer las asociaciones correctas del "todo" que se reparte, con las respectivas "partes". Para ello, se sugiere enfatizar que el primer paso para determinar una fracción es conocer el número de partes iguales en las que se divide el entero y que eso corresponde al denominador de la fracción, que una vez conocido el número de partes iguales en las que se divide el entero, se necesita saber cuántas de esas partes se están considerando y que ese número corresponde al numerador. Se recomienda que los estudiantes sigan este proceso, utilizando diferentes ejemplos, en distintos contextos, de manera que lo internalicen.

Se sugiere que, una vez internalizado este proceso, los docentes pidan a los estudiantes que realicen el proceso contrario; es decir, que ejemplifiquen, dibujen o grafiquen situaciones a partir de fracciones dadas, por ejemplo, que representen "gráficamente" las fracciones 2/3; 5/9; 4/10 y que expliquen con sus palabras sus ejemplos. También, se sugiere que se les pida a los estudiantes que, a partir de una fracción dada, describan un contexto.

Se recomienda que los docentes aborden la idea de "entero" como un todo que se divide en partes iguales, utilizando variados ejemplos en los que el entero corresponda a una unidad (por ejemplo, un círculo, una barra de chocolate, etc.) o a una colección de elementos (por ejemplo, un curso de 30 estudiantes, un conjunto de 12 lápices, etc.). Se sugiere tomar algunos ejemplos y pedir a los estudiantes que construyan fracciones a partir de esos enteros.

Aprender del error

Una cantidad considerable de estudiantes responde la pregunta del ejemplo 7 en forma errada, asociando numerador con la parte pintada de gris y denominador con la parte no pintada; y en el caso del ejemplo 8, también en forma errada, asocian el primer número que aparece en el enunciado con el numerador y el segundo número, con el denominador.

Frente a estos errores se sugiere que los docentes den el espacio y la confianza a los estudiantes que respondieron incorrectamente para que expliciten qué entendieron ellos que se les estaba preguntando y luego por qué respondieron de esa forma. Se recomienda que los docentes diseñen estrategias para que los estudiantes comprendan que las fracciones corresponden a partes de un todo y no a la relación entre dos partes.

2.4. Comprensión de ecuaciones e inecuaciones

El estudio de las ecuaciones e inecuaciones es base fundamental para el desarrollo del pensamiento lógico, el pensamiento abstracto, la capacidad de plantear y resolver problemas, etc. Este se inicia en niveles tempranos de la educación básica y permanece presente en todos los niveles posteriores de enseñanza.

Para lograr que los estudiantes comprendan las ecuaciones y las inecuaciones, deben haber comprendido los conceptos de igualdad y desigualdad. Para ello, se sugiere que los docentes trabajen con sus estudiantes para lograr la comprensión de:

- la relación entre dos cantidades y los símbolos que se usan para expresarla.
- el uso de la operación inversa.

Comprensión de la relación entre dos cantidades y los símbolos que se usan para expresarla

Las ecuaciones e inecuaciones son representaciones simbólicas de la relación matemática que existe entre dos expresiones que se encuentran conformadas por elementos conocidos (datos) y desconocidos (incógnitas). La relación matemática puede ser de igualdad o de desigualdad.

Antes de introducir a los estudiantes a las ecuaciones e inecuaciones, es importante que comprendan los tipos de relación que se pueden dar entre dos cantidades y las propiedades que se le asocian. Para ello, se recomienda que estas relaciones se introduzcan usando ejemplos de la vida cotidiana, material concreto y representaciones pictóricas en las que se solicite a los estudiantes explicar, con sus propias palabras, qué relación existe entre la cantidad de los conjuntos que se están comparando e incentivarlos a usar expresiones como “la cantidad de los dos es igual”, “la cantidad de los dos es desigual”, “la cantidad de este es menor que la de ese”, “la cantidad de este es mayor que la de ese”.

Además, es necesario que los estudiantes comprendan las implicancias de las relaciones que existen entre dos cantidades y las exigencias que se deben cumplir para que estas relaciones se mantengan. Los estudiantes deben comprender que, si entre dos cantidades hay una relación de igualdad, esta solo se mantendrá si ambas cantidades permanecen tal cual o se hacen los mismos cambios en ambas cantidades.

Para que los estudiantes internalicen este principio, se recomienda que realicen actividades con material concreto en las que se comparen dos cantidades iniciales (por ejemplo, dos paquetes con cinco elementos cada uno) y el docente vaya dando indicaciones de agregar o quitar elementos a los paquetes, solicitando que los estudiantes evalúen qué se hizo y si la relación de igualdad se mantuvo. Es importante que sean los propios estudiantes los que se den cuenta de que cuando realizan una acción idéntica en ambos paquetes (agregar dos elementos a ambos, quitar un elemento a ambos, dejar solo la mitad en ambos, etc.) la relación de igualdad se mantiene, mientras que cuando se hacen acciones distintas con los paquetes (agregar un elemento en uno y dos elementos en el otro, agregar un elemento en uno y quitar uno en el otro, etc.), la igualdad se convierte en desigualdad. Se sugiere que, al realizar esta actividad, los docentes incentiven a los estudiantes a hacer predicciones respecto de si con las instrucciones que se les da se mantendrá la igualdad o se transformará en desigualdad y qué sentido tendrá esta.

Luego, se recomienda que realicen la misma actividad, pero partiendo de paquetes con cantidades distintas (por ejemplo, un paquete con 5 elementos y otro con 10). En este caso, es importante que los estudiantes puedan darse cuenta de que, si realizan la misma acción a ambos lados, el sentido de la desigualdad se mantiene; sin embargo, que es difícil predecir qué va a pasar con el sentido de la desigualdad cuando se realizan acciones distintas, pues esto podría implicar que se mantenga el sentido, que se modifique el sentido o que la desigualdad se transforme en igualdad.

El recurso más ilustrativo para ayudar a los estudiantes a comprender las ideas de ecuación y de inecuación es la balanza. Esta permite comparar la masa de los objetos que se encuentran en dos bandejas y visualizar la relación que existe entre ellas (de igualdad o de desigualdad). De esta manera, los estudiantes pueden visualizar cuándo la balanza está en equilibrio y cuándo no lo está y se pueden dar cuenta de por qué se produce el desequilibrio.

Utilizando la balanza se puede reflexionar respecto de qué significa que una bandeja suba mientras la otra baja y de si es posible que ambas suban o bajen al mismo tiempo y por qué esto no es factible.

Se recomienda que los docentes incentiven a sus estudiantes a usar la balanza para comparar la masa de variados objetos y que se les ayude a comprender que lo que están haciendo es comparar la masa de los objetos que ponen en la balanza y que estas masas se pueden relacionar mediante los conceptos de "igual", "menor" o "mayor". Los docentes deben enseñar a los estudiantes a representar las relaciones que ven en la balanza de forma pictórica y utilizando palabras.

Una vez que los estudiantes comprendan las nociones de igualdad, desigualdad y las propiedades que se les asocian, se puede proceder a la representación simbólica de ellas. Para ello, es importante que los docentes introduzcan el uso de vocabulario preciso –como equilibrio o desequilibrio, igual, distinto, menor, mayor–, e incorporando simbología precisa –como "=", "<", ">"–.

Los símbolos definidos para estas relaciones son: igual: "="; menor que: "<" y mayor que: ">". Existen muchas mnemotecnias a las que recurren los docentes para que los estudiantes asocien estos símbolos con su significado. Es importante que, de utilizarse estas técnicas, se cautele que tengan un sentido similar a lo que se quiere recordar, ya que muchas veces, si estas técnicas van contra el sentido común (por ejemplo, que el más grande se "come" al más pequeño), pueden ser más difíciles de recordar y generar el efecto inverso a largo plazo.

El uso de la representación simbólica de la relación entre dos cantidades puede ejercitarse solicitando a los estudiantes que comparen números en el ámbito del 0 al 100, registrando la relación, usando el símbolo correspondiente y explicando la relación que establecieron. Con ello, los docentes pueden evaluar si los estudiantes están usando los símbolos correctamente.

Posterior a ello, se les puede solicitar comparar expresiones matemáticas que utilizan operaciones sencillas, por ejemplo:

- $7 + 3 \; \square \; 7 - 3$
- $10 + 5 \; \square \; 12 + 3$
- $30 + 10 \; \square \; 80 - 30$

Con esta actividad es importante que los estudiantes puedan constatar que el sentido de la desigualdad no depende de la operación que se está realizando; es decir, que puedan darse cuenta de que el que en una de las expresiones se realice una adición y en la otra se realice una sustracción no implica necesariamente que la expresión de la adición será mayor que la otra, y viceversa.

Una vez que los estudiantes han consolidado la comprensión de la igualdad y la desigualdad, se debe diseñar actividades orientadas a la comprensión del significado de las ecuaciones e inecuaciones. En el caso de las inecuaciones, se debe poner énfasis en que su solución puede ser un conjunto de valores que hacen que se mantenga la desigualdad.

Comprensión de la relación inversa entre la adición y la sustracción

Las ecuaciones e inecuaciones expresan la relación matemática que se da entre dos expresiones que se encuentran conformadas por elementos conocidos (datos) y desconocidos (incógnitas).

El proceso de resolver una ecuación (o inecuación) consiste en realizar diferentes operaciones a ambos lados de la igualdad (o desigualdad) para "despejar" el término desconocido y así conocer su valor (o los valores que puede adoptar). Este proceso se sustenta en el uso de operaciones inversas que permiten "despejar" el término desconocido.

Para favorecer la comprensión del sentido de los pasos que realizan los estudiantes al resolver ecuaciones e inecuaciones, se recomienda que en un inicio se introduzca el trabajo con problemas numéricos en los que se aplique la relación inversa entre la adición y la sustracción para llegar a los valores desconocidos.

Para ello, se pueden usar problemas en los que se requiere determinar la cantidad de elementos que falta para completar una cantidad total, dada una cantidad parcial.

Por ejemplo: "Un curso necesita vender 100 números de rifa y ha vendido 60. ¿Cuántos números de rifa les falta por vender?"

A partir de este problema se puede guiar a los estudiantes para que representen la situación.

- Números vendidos + números por vender = Números que se necesita vender
- 60 + ? = 100
- e incentivarlos a que lo resuelvan y expliquen cómo lo hicieron.

Algunos estudiantes podrían resolver la situación contando de 10 en 10 partiendo desde 60 hasta llegar a 100, mientras que otros podrían resolverla realizando la sustracción 100 – 60 = 40.

Luego se les puede presentar a los estudiantes otro problema con valores con lo que no es tan fácil llegar a la solución por conteo. Por ejemplo, uno cuya representación sea: 24 + ? = 136.

Basándose en esta representación, se recomienda que los docentes pregunten a los estudiantes ¿cuál es la pregunta que se busca responder? y los orienten para que lleguen a respuestas del tipo: "¿qué número se debe sumar a 24 para que dé como resultado 136?". A partir de ello, se sugiere que se realicen preguntas guiadas para que los estudiantes se den cuenta de que situaciones como esta se asemejan a cómo ellos realizan la comprobación de los resultados al hacer una operación y saber si están correctos y que adviertan que lo que están haciendo al resolver esa igualdad es aplicar la operación inversa.

Ejemplos de errores asociados a comprensión de igualdades, desigualdades y sus aplicaciones

Ejemplo de pregunta de resolver una ecuación

Ejemplo 12. *Pregunta de resolver una ecuación*

Observa la siguiente ecuación:

$$7 + x = 15$$

¿Qué valor debe tener x para que se cumpla esa ecuación?

✗	15	Interpreta que el signo igual se usa para indicar el resultado del problema.
✓	8	Respuesta correcta.

En el ejemplo 12 se plantea una ecuación de un paso que involucra una adición. Para responder correctamente esta pregunta, los estudiantes deben comprender qué es una ecuación, qué significa el signo "=" dentro de la ecuación, qué significa el valor de la incógnita "x" dentro de la ecuación y cómo se resuelve la ecuación.

El error más frecuente que se observa en esta pregunta se relaciona con la comprensión del signo de igualdad. Los estudiantes asociarían la "igualdad" al resultado del problema, sin considerar que representa la relación entre las expresiones "7 + x" y "15".

Recomendaciones pedagógicas

Comprobación del resultado como apoyo a la comprensión de las ecuaciones

Para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones en educación básica, es necesario comprender que las representaciones de ellas son abstractas y requieren entender bien el significado de cada una de las partes que la componen y luego de eso, cómo se resuelven.

Como se ha mencionado anteriormente, las ecuaciones plantean relaciones de igualdad entre dos cantidades, entre las cuales hay algún término desconocido (incógnita). De ese término desconocido depende que la igualdad se cumpla o no se cumpla. Por ello, para resolver una ecuación hay que descubrir cuál es ese término desconocido de modo que la igualdad se cumpla.

Una vez que la ecuación está resuelta, es necesario comprobar si está bien resuelta. El procedimiento para ello es reemplazar el valor obtenido para la incógnita en la ecuación y verificar que el resultado en ambos lados de la igualdad sea el mismo.

Se sugiere que los docentes desarrollen en sus estudiantes el hábito de comprobar si la solución a la que llegan hace que la igualdad se cumpla. Realizar este procedimiento contribuye a que los estudiantes adquieran conciencia del significado de la igualdad y ayuda a prevenir que se cometa este tipo de error.

Procedimiento para resolver una ecuación

Una vez que los estudiantes comprenden de qué trata una ecuación y su solución, hay que reforzar los procedimientos asociados a ella.

Los estudiantes deben comprender el sentido de las operaciones inversas, como la adición y la sustracción. Utilizando la metáfora de la balanza, deben "agregar" o "quitar" elementos hasta lograr el "equilibrio". En el caso de las ecuaciones, es importante hacer notar que el símbolo de "igualdad" se debe mantener siempre por lo que es necesario operar a ambos lados de la ecuación de la misma forma.

En el ejemplo, los estudiantes debían resolver:

$$7 + x = 15$$

En esta ecuación se puede observar que la "x" está acompañada de un 7 y que ambas cantidades se están sumando. Para conocer el valor de "x", de modo que la igualdad se mantenga, se debe "despejar" la "x" (dejarla sola a un lado de la ecuación). Para ello, es necesario eliminar el 7 del lado izquierdo restando 7 en ese mismo lado. Dado que se requiere mantener la igualdad, si se resta 7 en el lado izquierdo se debe restar 7 en el lado derecho.

$$7 + x = 15$$

$$(7 + x) - 7 = 15 - 7$$

$$(7 - 7) + x = 15 - 7$$

$$0 + x = 8$$

$$X = 8$$

Se recomienda que se presente este procedimiento a los estudiantes y, a través de preguntas guiadas, se los oriente para que sean capaces de explicar por qué para resolver esta ecuación deben restar 7 a ambos lados de la igualdad.

Además, los docentes deben reforzar que una vez que está determinado el valor de "x" es necesario comprobar que la ecuación esté bien resuelta. Para ello, se remplaza el valor de x en la ecuación y se comprueba la igualdad:

- La ecuación es $7 + x = 15$
- El valor de "x" es 8, entonces, $7 + 8 = 15$

$$15 = 15$$

Se sugiere reforzar la comprensión del procedimiento para resolver una ecuación, utilizando diferentes ejemplos que incluyan adiciones o sustracciones, y que tengan la incógnita ubicada en distintas posiciones. Se recomienda pedir a los estudiantes que expliquen, en cada paso, qué están haciendo y por qué lo hacen. También, que comprueben todos los resultados obtenidos.

Aprendiendo del error

Si frente a una ecuación como la planteada en el ejemplo 12, una gran cantidad de estudiantes responde que la expresión de la derecha (en este caso 15) es la solución, se recomienda que los docentes pregunten a los estudiantes cómo llegaron a ese resultado. Basándose en la respuesta de los estudiantes, los docentes pueden hacer nuevas preguntas que los ayuden a ir descubriendo el significado del signo igual dentro de la ecuación. Además, se recomienda que los estudiantes refuercen que es importante comprobar los resultados obtenidos reemplazando la x por la solución a la que llegaron.

Ejemplo de pregunta de resolver una inecuación

Ejemplo 11. *Pregunta de resolver una inecuación*

Observa la inecuación:

$$x + 12 < 25$$

A continuación, escribe un valor que pueda tomar x para que se cumpla esa inecuación.

✗	13	Resuelve la inecuación como si fuera una ecuación.
✓	Cualquier valor menor que 13	Respuesta correcta.

La pregunta del ejemplo 11 pide identificar un valor que puede adoptar la incógnita para que se cumpla una inecuación que involucra una adición. Para responder correctamente esta pregunta los estudiantes deben comprender qué es una inecuación, qué significa el signo "<" dentro de la inecuación, qué significa la incógnita "x" dentro de la inecuación y cómo se resuelve la inecuación. El error frecuente que se observa en este ejemplo se relaciona con la comprensión del signo de desigualdad, ya que los estudiantes resuelven esta inecuación como si se tratara de una ecuación.

Recomendaciones pedagógicas

Comprensión de las inecuaciones

Para comprender las inecuaciones es necesario entender la relación de igualdad entre cantidades y, basándose en ello, comprender las relaciones de desigualdad entre dos cantidades.

En lo referido a las relaciones de desigualdad, los estudiantes deben comprender que si tienen dos cantidades distintas, entonces una de ellas es mayor que la otra. Estas relaciones de desigualdad permiten comparar números, ordenar números, representar situaciones problemáticas y resolver problemas.

Los símbolos de desigualdad ("$>$" y "$<$") se utilizan para comparar dos cantidades. Las desigualdades $37 < 39$ o $56 > 25$ corresponden a desigualdades verdaderas, mientras que $24 > 43$ es una desigualdad falsa, ya que 24 no es mayor que 43. Cuando se tiene una relación de desigualdad en la que existe un término desconocido, esa relación se llama inecuación. Resolver una inecuación significa encontrar el conjunto de números que hacen verdadera la desigualdad que se plantea.

Comprensión de que las inecuaciones pueden tener infinitos resultados

Una diferencia importante entre las ecuaciones (lineales) y las inecuaciones es que estas últimas pueden tener muchas soluciones.

En el caso de las ecuaciones lineales, por tratarse de una igualdad, existe solo un valor que permite que esa igualdad sea verdadera.

Por ejemplo, en $x + 7 = 15$, el único valor que hace verdadera esa igualdad es 8 y, por tanto, la solución de esa ecuación es $x = 8$. En otras palabras, si se reemplaza el valor de x por cualquier número distinto de 8, no se verificará la igualdad.

Ahora, si se transforma esa ecuación en una inecuación, por ejemplo, cambiando el signo "igual" por "menor que" queda: $x + 7 < 15$.

La pregunta que permite responder esta inecuación es ¿qué números (o posibles valores de "x") se pueden sumar a 7 para que su resultado sea un número menor que 15?

Para que los estudiantes comprendan que una inecuación puede tener muchas soluciones, se sugiere que los docentes les planteen inecuaciones como la anterior y les pidan reemplazar la x por distintos números para evaluar la veracidad o falsedad de la desigualdad.

Por ejemplo:

- si se considera $x = 1$; el resultado que se obtiene es 8 y 8 es menor que 15, por tanto, $x = 1$ es solución de la inecuación.
- si se considera $x = 2$; el resultado que se obtiene es 9 y 9 es menor que 15, por tanto, $x = 2$ también es solución de la inecuación.
- si se considera $x = 3$; el resultado que se obtiene es 10 y 10 es menor que 15, por tanto, $x = 3$ también es solución de la inecuación.

- y así sucesivamente, hasta encontrar valores que no son solución a la inecuación ($x = 8$, $x = 9$, etc.).

A partir de esta actividad, se sugiere que los docentes hagan preguntas a los estudiantes que les permitan darse cuenta de que hay un valor en el que este tipo de inecuación deja de cumplirse y que, por tanto, son soluciones todos los valores menores que este y no son soluciones ese valor y todos los mayores que ese.

Una vez que los estudiantes han comprendido que la solución a una inecuación puede ser un conjunto de valores, se sugiere que se trabaje la resolución de inecuaciones utilizando los procedimientos formales para ello, intencionado la reflexión en torno a la solución que se obtiene.

Procedimiento para resolver una inecuación

Una vez que los estudiantes han consolidado los aprendizajes relativos a la resolución de ecuaciones de un paso con adiciones o sustracciones, el tránsito a la resolución de inecuaciones se hace más natural.

Para comprender el procedimiento que permite resolver una inecuación, es necesario que los estudiantes comprendan qué significan las desigualdades, que se apropien de los símbolos de "menor que" y "mayor que" y que comprendan que, a diferencia de las ecuaciones lineales, las inecuaciones pueden tener más de una solución.

Además, es importante que comprendan que una desigualdad tiene dos maneras de ser representada: por ejemplo, $16 < 25$ es equivalente a decir que $25 > 16$ y que, según el caso, puede ser más conveniente usar una representación que la otra.

Al resolver inecuaciones en el ámbito de los números naturales, las reglas que eran válidas en el caso de las ecuaciones también se aplican. Si se suman o se restan cantidades iguales a ambos lados de una desigualdad, la desigualdad se mantiene. Por ello, el procedimiento para resolver inecuaciones en el ámbito de los números naturales es similar al de resolver ecuaciones, la diferencia está en la interpretación del resultado.

Es importante que los docentes refuercen constantemente la idea de que en una inecuación hay que mantener el sentido de la desigualdad y que generen el hábito de comprobar constantemente si el sentido se mantiene. Esto es fundamental para cuando en cursos posteriores se trabaje con inecuaciones en el ámbito de los números enteros, donde los estudiantes deberán darse cuenta de que, si se multiplican ambos lados por un número negativo, el sentido de la desigualdad cambia.

Aprendiendo del error

Los estudiantes que contestaron en forma incorrecta resolvieron el problema igualando ambos lados de la inecuación, lo que se podría interpretar como que no comprendieron el significado del símbolo "<" o no comprendieron el significado del resultado que obtuvieron al realizar el procedimiento.

Cuando los estudiantes cometan este tipo de error, se recomienda que los docentes les pidan que expliquen el razonamiento que los llevó al resultado obtenido. Luego, se sugiere que, usando preguntas del tipo: ¿qué representa el signo "<" ?, ¿qué nos dice este signo respecto de la relación que hay entre ambos lados de la inecuación?, ¿qué pasa con la relación entre las dos expresiones cuando x adopta el valor 13?, se les ayude a identificar que se trata de una inecuación y a recordar las características de las inecuaciones.

Una vez que los estudiantes se hayan dado cuenta de su error, se recomienda que el docente les pregunte por qué creen que lo cometieron y qué creen que pueden hacer para no volver a cometerlo.

Conclusiones y desafíos

El análisis de las respuestas que dan los estudiantes de 4° básico a las preguntas de las pruebas de Matemática Simce y TIMSS, aplicadas los años 2013 a 2017, muestran que una alta proporción de estudiantes de este nivel presenta errores que se asocian con:

- problemas en la comprensión y aplicación de conceptos y nociones matemáticos,
- tendencia a aplicar algoritmos y estrategias de resolución de problemas de forma automatizada, sin considerar el contexto y la situación a la que se aplican.

Por consiguiente, se puede observar una relación estrecha entre ambos tipos de errores, ya que la falta de comprensión de los conceptos y nociones matemáticas puede dificultar la evaluación de su transferibilidad a situaciones nuevas y conducir a la aplicación de propiedades y procedimientos en situaciones para las que no son válidos.

Por ejemplo, la falta de comprensión del concepto de fracción podría facilitar la transferencia de la consigna "sumar unidades con unidades, decenas con decenas, etc." a "sumar numerador con numerador y denominador con denominador", conduciendo a que se cometan errores como el ilustrado en el capítulo 1.

Asimismo, la falta de comprensión del significado de la sustracción entre dos cantidades podría facilitar que los estudiantes transfirieran el procedimiento de sumar cifra a cifra sin considerar que en la sustracción el orden altera el resultado (se debe restar el sustraendo al minuendo) y que cometieran errores como el presentado en el capítulo 1.

Los problemas de comprensión y aplicación de conceptos y nociones matemáticos también pueden conducir a que los estudiantes apliquen algoritmos y estrategias de forma automatizada, sin evaluar su pertinencia. Por ejemplo, si no se comprende el significado de las cuatro operaciones básicas, es más probable que se recurra a la búsqueda de "claves" que indiquen cuál es la operación que permitirá resolver un determinado problema. De esta manera, es posible que los estudiantes se guíen por la presencia de expresiones estereotipadas sin evaluar el contexto en que estas se utilizan y cometan los errores ilustrados en el capítulo 1.

El trabajo de análisis expuesto en este documento evidencia que enfrentar a los estudiantes a diferentes preguntas y problemas puede entregar información valiosa respecto de lo que saben y son capaces de hacer y respecto de las dificultades, confusiones o vacíos que puedan tener. Por ejemplo, en una pregunta de multiplicación, un estudiante puede no comprender la operación y otro presentar problemas en el uso de la "reserva". Por ello, es importante que los docentes provean a los estudiantes de numerosas instancias en las que puedan mostrar lo que saben y se puedan identificar sus debilidades. La información obtenida de las diferentes evaluaciones permite conocer a los estudiantes y retroalimentar las prácticas pedagógicas, para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

De las conclusiones expuestas anteriormente se desprenden tres principales desafíos para las escuelas:

- Diseñar estrategias que permitan considerar el aprendizaje matemático desde una perspectiva holística, en la que problemas en la comprensión de algún concepto pueden afectar la comprensión y aplicación de otros.
- Reorientar las instancias de evaluación de manera que permitan recoger respecto de lo que saben y son capaces de hacer los estudiantes y, a la vez, respecto de cuáles son sus debilidades, problemas de comprensión, etc.
- Planificar el proceso de enseñanza y aprendizaje de manera longitudinal, de manera de identificar aquellas prácticas que se realizan en los primeros cursos que pudiesen llevar a que los estudiantes transfieran aprendizajes a ámbitos en los que no son válidos.

En lo que se refiere al primero de los desafíos, es importante tener en cuenta que el aprendizaje matemático se construye sobre la base de conocimientos y habilidades previamente adquiridos, los que se van ampliando y profundizando. Si bien, en las Bases Curriculares, los Objetivos de Aprendizaje se separan en ejes de contenido, existe interdependencia entre los aprendizajes dentro de un mismo eje e incluso entre los de ejes distintos. Ello se evidencia, por ejemplo, en cómo problemas con la comprensión del valor posicional pueden afectar a los aprendizajes relacionados con las operaciones en el eje de números y operaciones, pero también con aprendizajes relativos al eje de patrones y álgebra, medición y datos y probabilidad. Por esta razón, es importante aprovechar todas las instancias de enseñanza y aprendizaje para reforzar los aprendizajes adquiridos o bien para promover la consolidación de aquellos que están en proceso de adquisición.

Desde lo pedagógico, por ejemplo, se sugiere identificar los aprendizajes previos necesarios para alcanzar un nuevo aprendizaje y evaluar si los estudiantes los han consolidado. En caso de que los estudiantes presenten dificultades o vacíos, es importante que existan estrategias para poder abordarlos.

Respecto del segundo desafío, es importante que en las escuelas se considere a la evaluación como un proceso inherente de la enseñanza y el aprendizaje y no como una instancia que tiene como único fin la calificación. La evaluación debe poner se al servicio del aprendizaje entregando a estudiantes y docentes información oportuna que retroalimente las prácticas. En el caso de los estudiantes, la evaluación debe servir para que sepan qué aprendieron, qué les falta por aprender, cuáles son los errores que cometen y cómo pueden superar esos errores. En lo que corresponde a los docentes, las evaluaciones deben ayudarles a identificar aquellos aprendizajes que han logrado consolidad sus estudiantes, aquellos que no han consolidado y cuáles son los problemas más frecuentes que muestran sus estudiantes, de manera de poder orientar sus prácticas pedagógicas.

Durante el proceso de aprendizaje es natural cometer errores. Es importante, entonces, estimular a los estudiantes a que pierdan el miedo de equivocarse, de manera que los errores sean considerados como oportunidades de aprendizaje y no como una señal de fracaso.

Este documento entrega información útil para reflexionar acerca de las instancias de evaluación que se realizan en el aula y de cómo estas pueden entregar información relevante de lo que los estudiantes han aprendido y de los errores que cometen frecuentemente. En esta línea, cabe hacerse la pregunta de cómo se está aprovechando la información que entregan los resultados las diferentes evaluaciones: ¿qué tipo de retroalimentación se entrega a los estudiantes en controles, pruebas o trabajos en clases?, ¿se trabaja con los estudiantes el identificar los tipos de errores que cometen y las causas de ello ?, ¿se realiza algún tipo de sistematización de los errores frecuentes de los estudiantes?

Para un óptimo empleo de la información, se sugiere comentar los errores recogidos en este documento para generar espacios de reflexión con los estudiantes e identificar el origen de los errores cometidos en las evaluaciones o trabajos.

En lo relativo al último desafío, es importante que en la planificación del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas participen docentes de diferentes cursos, de manera de identificar los momentos en los que se deben alcanzar los diferentes aprendizajes y visibilizar la importancia de consolidar los aprendizajes previos, así como el uso que se dará a esos aprendizajes en cursos posteriores.

Tener una referencia de cuándo y en qué contexto se retomará un aprendizaje es importante, pues permite significar mejor dicho contenido y asignarle la relevancia correspondiente. Asimismo, estar familiarizado con la forma en que se introdujeron los conceptos relevantes puede ser útil cuando estos sean retomados en cursos superiores para lograr una adecuada vinculación con los nuevos contenidos y reforzar aquellos conceptos y procedimientos que se perciben como más débiles en los estudiantes.

Al igual que con el documento elaborado para II medio, se espera que la información entregada sea un insumo para la reflexión que se realiza al interior de la escuela, de manera que los docentes puedan orientar sus prácticas hacia el logro de mayores aprendizajes en sus estudiantes.

Lista de referencias

Agencia de Calidad de la Educación (2018). *Aprendiendo de los errores. Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de II medio en las pruebas Simce y sus implicancias pedagógicas*, Santiago de Chile: autor.

Ball, D. L., Hill, H.C, y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(1), pp. 14-17, 20-22, 43-46.

Bronzina, L; Chemello, G. y Agrazar, M., (2010). *Aporte para la enseñanza de la matemática*. Oficina Regional de Educación de la UNESCO para América Latina y el Caribe (OREALC/UNESCO Santiago) y del Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación – LLECE.

Chamorro, M. (2005). *Didáctica de las matemáticas para educación infantil*. Madrid: Pearson Educación.

Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. NJ: Lawrence Erlbaum.

Ministerio de Educación, Mineduc. (2012). *Bases Curriculares Educación Básica*, Santiago de Chile: autor.

Ministerio de Educación, Mineduc. (2013). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*, Santiago de Chile: autor.

Ministerio de Educación, Mineduc. (2013). *Estándares de Aprendizaje Matemática 4° básico*, Santiago de Chile: autor.

600 600 2626, opción 7
@agenciaeduca
facebook/Agenciaeducacion
contacto@agenciaeducacion.cl
www.agenciaeducacion.cl

Aprendiendo de los errores | Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de 4º básico en las pruebas Simce y TIMSS y sus implicancias pedagógicas