FACTORES ASOCIADOS CON EL RENDIMIENTO ESCOLAR

Matemática II medio 2012

Documento de Trabajo N°4

Diciembre 2013

Departamento de Estudios de la Calidad de la Educación

División de Estudios

AGENCIA DE CALIDAD DE LA EDUCACIÓN

Esta es una publicación del departamento de Estudios de la Calidad de la Educación, División de Estudios, Agencia de la Calidad de la Educación.

Francisca Calderón [1]

Claudia Matus[2]

Colaboración

Marianne Hahn[3]

[1]Ing. Estadístico, Universidad de Santiago de Chile. Profesional Departamento de Estudios de la Calidad de la Educación.
[2]Ing. Civil Matemático. PhD Estadística University of Pittsburgh. Departamento de Estudios de la Calidad de la Educación.
[3]Psicóloga, Universidad Católica de Chile, Profesional Departamento de Estudios de la Calidad de la Educación.

Índice

1. Introducción

El conocimiento adquirido en la etapa escolar, medido a través la evaluación del rendimiento académico, es el resultado de la combinación dinámica de múltiples elementos. En el proceso educativo juegan roles importantes tanto el establecimiento educacional donde estudia el alumno, los docentes que le enseñan, sus padres, los adultos que lo rodean y el estudiante mismo, cada uno aportando desde su papel específico.

Simce pertenece al sistema nacional de evaluación de resultados de aprendizaje que desde 2012 es aplicado por la Agencia de Calidad de la Educación[4]. Su propósito principal es contribuir al mejoramiento de la calidad y la equidad de la educación. Para esto, informa sobre el desempeño de los estudiantes en diferentes áreas de aprendizaje del Currículum Nacional y relaciona estos desempeños con el contexto escolar y social en el cual aprenden los niños y jóvenes. En los análisis posteriores se reconoce que los logros académicos están condicionados por características del ambiente y restricciones a las que los estudiantes están sometidos, y se busca situar los resultados en contextos comparables. De esta manera se contribuye con evidencia al diseño de políticas públicas.

Los resultados del Simce son la principal herramienta de información del sistema educativo respecto de los aprendizajes logrados por los alumnos en los diferentes ciclos de enseñanza. Al situar los logros de los estudiantes empleando un referente nacional, se complementa el análisis que realiza cada establecimiento a partir de sus propias evaluaciones.

Como se señaló anteriormente, las pruebas Simce evalúan los aprendizajes entregando resultados de logro educativo en distintas asignaturas y para diferentes niveles. Este documento de trabajo se centra en el análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes de II medio en Matemática. El primer paso para mejorar dichos resultados es la identificación de los factores asociados y potencialmente influyentes en los rendimientos escolares.

Los resultados en Educación Matemática de los estudiantes de II medio el año 2012 mejoraron significativamente con respecto de la medición anterior en el año 2010. Para analizar y explicar la variabilidad de los puntajes en la evaluación 2012 se construyó un modelo jerárquico o multinivel (HLM[5]) de factores asociados al rendimiento escolar de los estudiantes, donde se tomaron en cuenta características individuales y contextuales tanto de los estudiantes como de los establecimientos.

La idea que subyace a tales modelos es que los datos procedentes de la realidad educativa tienen estructura

[4]Para una descripción del Simce y su historia ver http://www.agenciaeducacion.cl/simce/que-es-el-simce/

[5]Por su sigla en inglés, correspondiente a Hierarchical Linear Model.

jerárquica o en niveles. Las pruebas estadísticas descansan en el supuesto de independencia de las observaciones. Dado que compartir el mismo contexto genera una dependencia natural, si no se considera la estructura jerárquica de los datos los errores estándar estimados de las pruebas estadísticas tradicionales podrían estar subestimados (Hox, 1995). Esto puede llegar a invalidar las técnicas de análisis estadístico tradicionalmente empleadas para la investigación sobre factores asociados (Hox, 1998; Goldstein, 2003).

El modelo descrito en este documento de trabajo fue el utilizado para reportar los factores asociados al rendimiento de los estudiantes de II medio en el Informe Nacional de resultados Simce 2012[6]. Se incluyen las variables con mayor asociación con el puntaje Simce obtenido en Matemática que además cuentan con un respaldo en la literatura respecto de su relación con el rendimiento educacional.

El presente documento de trabajo tiene como objetivo exponer el modelo HLM aplicado a los puntajes de Matemática en II medio. En la siguiente sección se presenta información de los Cuestionarios de Contexto, principal insumo de información de las variables utilizadas; luego se describe la construcción de las variables; para luego, en la sección 4, exponer el modelo detallando su estructura, verificando los supuestos y discutiendo los resultados obtenidos.

[6] El informe se encuentra en: http://www.agenciaeducacion.cl/destacado/informe-nacional-de-resultados-simce-2012/
El link de presentación desde donde se pueden descargar diversos documentos de resultados es:
http://www.agenciaeducacion.cl/simce/resultados-simce/

2. Marco teórico modelo HLM de factores asociados

Además de las pruebas referidas al currículo, la Agencia de la Calidad de la Educación evalúa el logro de los objetivos generales de la educación en los ámbitos personales y sociales. Para esto, emplea cuestionarios autoaplicados en docentes, estudiantes, padres y apoderados. Adicionalmente, los cuestionarios permiten indagar en los factores contextuales que podrían estar asociados al logro de aprendizaje de los alumnos. Entre estos factores se encuentran aspectos demográficos, sociales y culturales, del ámbito de la familia, el establecimiento y la comunidad a la que pertenecen los estudiantes. Adicionalmente, para complementar esta información, se utiliza información administrativa de diversos registros.

Los cuestionarios que actualmente se aplican son:

- **Cuestionarios para estudiantes:** es respondido por los mismos estudiantes evaluados. Indaga sobre aspectos generales de su establecimiento escolar, así como sobre sus procesos y estrategias de aprendizaje dentro y fuera del aula, sus intereses y motivaciones, entre otros.
- **Cuestionarios para profesores:** es respondido por los profesores de cada curso evaluado y contiene preguntas relativas a su formación profesional y a los contenidos que enseñó durante el año escolar, entre otros.
- **Cuestionarios para padres y apoderados:** es respondido por los apoderados de cada estudiante evaluado. Indaga aspectos como el nivel educacional de los padres, ingreso del hogar y nivel de satisfacción con el establecimiento, entre otros.

También se utilizó información administrativa contenida en las bases de datos del Ministerio de Educación y de la Agencia de la calidad de la educación, para cada establecimiento.

Utilizando las respuestas de estudiantes, docentes, padres y apoderados, se construyeron distintos índices que resumen la información recogida de fuentes válidas y confiables manteniendo su estructura de asociación. A partir de la literatura especializada, las variables incluidas en el modelo suponen una asociación –generalmente positiva– con el desempeño educativo. Estas variables son susceptibles de ser abordadas por los actores educativos, constituyen factores asociados propiamente tal y son de interés para la elaboración de políticas públicas. Además, para aislar sus efectos, se incorporan factores condicionantes que no son susceptibles de ser modificados por los actores educativos[7].

[7] Como el género o las características socioeconómicas de los estudiantes.

Este documento está enfocado en explicar la variabilidad de los puntajes en la prueba SIMCE Matemática II medio 2012 a través de los factores asociados y variables de contexto más relevantes. Se incluyen las variables que están más asociadas al puntaje y que a su vez inciden en mayor medida en el alza o disminución de los puntajes, de acuerdo a un modelo jerárquico o multinivel de factores asociados al rendimiento escolar de los estudiantes.

2.1. Conjunto de variables o factores asociados

Los estudiantes que pertenecen a un mismo recinto educacional comparten algunas características, es decir, las variables a nivel establecimiento permanecen constantes entre los estudiantes de ese establecimiento. Dada esta situación, es recomendable la utilización de un modelo HLM para explicar la variabilidad de los datos. Se definen dos niveles, siendo el **nivel 1** la estructura del modelo donde se encuentran las variables de los estudiantes con sus características individuales y el **nivel 2**, la estructura del modelo donde están los atributos del establecimiento. Esto último se refiere a las características compartidas por los estudiantes de un mismo establecimiento.

Inicialmente se realiza un análisis de asociación entre la información autoreportada por estudiantes, padres, apoderados y docentes en los Cuestionarios de Contexto y el rendimiento de los alumnos evaluado a través de la prueba Simce sector Matemática. A partir de las variables con mayor asociación lineal se construyen índices, de manera de poder resumir información reportada en varios ítems en un solo indicador.

Es importante recalcar que en ningún caso la asociación lineal pretende indicar causalidad, pues por sí mismo un modelo de estas características no es capaz de aislar la endogeneidad de las variables[8]. A continuación se detalla las variables explicativas y de contexto utilizadas según el nivel en el que fueron incorporadas al modelo, individual (estudiante) o colectivo (establecimiento).

[8] Dado que la asignación de los alumnos a los establecimientos no es aleatoria, se genera un problema de endogeneidad en las variables medidas, asociadas a rendimiento.

Nivel de estudiante

- **Motivación por Aprendizaje en Educación Matemática** Índice que recoge la motivación del estudiante por el aprendizaje de matemáticas. En esta variable se refleja la importancia de la asignatura para el alumno y el gusto por ella. En ese sentido, estudios han encontrado que factores que se vinculan significativamente con el rendimiento académico son la motivación escolar y el autocontrol (Edel, 2003; Gubbins, Dois y Alfaro, 2006). Los estudiantes aprenden mejor cuando están interesados e involucrados. Algunos estudios sugieren que los estudiantes con un mayor nivel de compromiso, es decir, los que están interesados en lo que se les enseña, aprenden mucho más que los que tienen un compromiso meramente práctico, es decir, que siguen las normas y hacen las tareas que se les pide, pero que no tienen un interés real en ello (OECD, 2010).

- **Autovaloración en Matemáticas** Índice que recoge la valoración del estudiante en sus capacidades académicas, su percepción respecto de sus aptitudes y rendimiento respecto de sus pares. Lo que los estudiantes piensan y sienten acerca de sí mismos se manifiesta en su forma de actuar y de decidir cuándo se enfrentan a situaciones y tareas desafiantes (Arancibia, 1992). Las investigaciones ponen de manifiesto que la implicación activa del sujeto en el proceso de aprendizaje aumenta cuando se siente autocompetente, es decir, cuando confía en sus propias capacidades y tiene altas expectativas de autoeficacia, valora las tareas, se encuentra motivado y se siente responsable de los objetivos de aprendizaje (Durlak et al., 2011).

- **Autopercepción Académica** Índice que recoge la percepción del estudiante en su desempeño en la asignatura de Matemática y sus expectativas académicas para el futuro. No se puede entender la conducta escolar sin considerar las percepciones que el sujeto tiene de sí mismo y, en particular, de su propia competencia académica (Esnaola, 2008). Existe actualmente suficiente evidencia acerca de la importancia de su desarrollo en el contexto educativo y de su impacto en el rendimiento escolar de los estudiantes. Múltiples investigaciones que abordan esta temática coinciden en destacar su papel en la regulación de las estrategias cognitivo-emocionales implicadas en el aprendizaje y rendimiento académico (González-Pienda et al., 1997). El conocimiento que un sujeto tiene acerca de sus posibilidades en el ámbito educativo, es un buen predictor de los rendimientos académicos, tanto totales como específicos (Muñiz et al., 2009).

- **Nivel socioeconómico del Estudiante** Índice socioeconómico contextual individual construido a partir de los niveles educacionales reportados por padre y madre y por el nivel de ingreso del hogar. Existe extensa documentación disponible respecto del impacto de este sobre los resultados de aprendizaje (ver entre otros Coleman, 1966; Jencks, 1972; Stringfield y Teddlie, 1989; Byrk y Raudenbush, 1992; Creemers, 1994; Luyten, 1994; Rowe y Hill, 1994; Sheerens y Bosker, 1997; Marzano, 2000; Hoxby, 2001). Asimismo, existe evidencia de estudios nacionales e internacionales que han mostrado que el nivel de estudio de ambos padres se asocia positivamente al rendimiento académico, especialmente si este nivel alcanza la educación técnica superior o universitaria (Mizala et al., 1999; Roscigno y Ainsworth-Darnell, 1999; OCDE, 2010; IEA, 2008, Marks et al., 2006).

- **Recursos Educativos en el Hogar** Índice contextual construido en base a la tenencia de recursos educativos que posee el hogar donde vive el estudiante, como computador, internet y libros. Relacionado a la existencia y número de libros en el hogar, estudios internacionales como PISA, TIMSS, PIRLS han mostrado en diversas ocasiones su asociación a resultados de aprendizaje. En otros estudios como Schultz et al. (2008) se usa el número de libros en el hogar como una medida de nivel socioeconómico. Esta es una medida de igualdad de oportunidades para los autores. Resultados similares es posible encontrar en Marks et al. (2006). En cuanto a la presencia de otros recursos educativos en el hogar, la literatura tiende a centrarse en dos: la existencia de computadores y la conectividad a internet en el hogar. Al respecto, existen autores que plantean que es posible que las nuevas generaciones de estudiantes requieran un mayor uso de tecnologías en el proceso educativo, para alcanzar mejores resultados (Pedró, 2006), donde la disponibilidad y por lo tanto el uso en el hogar, tendrían un efecto positivo sobre los resultados de aprendizaje (Peirano et al., 2009).

- **Calificación Docente** Variable que mide la nota con la que los padres y apoderados califican al docente de matemáticas del estudiante. Aunque la evidencia existente no es abundante, estudios señalan una relación positiva entre la satisfacción de los padres con la enseñanza entregada a sus hijos y los logros académicos de los estudiantes (OFSTED, 2006; Dearing et al., 2008, citados en TIMSS, 2009).

- **Expectativas de los Padres** Variables que miden el mayor nivel educativo esperado por los padres para el estudiante. Estudios internacionales de los últimos tiempos han encontrado reiteradas veces una relación positiva entre las expectativas educacionales que tienen los padres acerca de sus hijos y los resultados en pruebas estandarizadas de estos (IEA, 2008; OCDE 2010). Otros estudios han corroborado esta asociación, por ejemplo, una investigación en países asiáticos –los que se caracterizan por un alto logro académico– mostró que las expectativas de los padres resultaron ser el mejor predictor de rendimiento académico de los estudiantes (Phillipson y Phillipson, 2007). Por su parte, un estudio en Finlandia demostró que los niños cuyos padres tienen más confianza en sus competencias rinden mejor en Matemática, pues las expectativas de los padres hacen que estos niños presenten conductas dirigidas al aprendizaje (Rytkönen et al., 2005).

- **Asistencia** Variable que mide si la asistencia a clases del estudiante fue superior al 80 %. Dentro de los estudios relacionados con el tema, Epstein y Sheldon (2002), plantean que los estudiantes con altos porcentajes de inasistencia tienen menos oportunidades de obtener buenos resultados académicos y terminar exitosamente la escuela. En concordancia con esta hipótesis, el Centro de Políticas Públicas de la Universidad Católica de Chile llevó a cabo un estudio que muestra que el número de inasistencias anuales está altamente relacionado con los resultados en la prueba Simce, lo cual sugiere que los estudiantes con un alto porcentaje de inasistencia adquieren menos conocimiento que el esperable para pasar de curso (Paredes et al., 2009). De modo más específico, Gottfried (2010) postula que tasas de inasistencia crónica durante los primeros años de enseñanza básica afectan significativamente la adquisición de habilidades matemáticas y verbales elementales, así como también actúan como un factor de riesgo para el éxito en los cursos posteriores. Asimismo, estudios internacionales muestran que el mayor ausentismo de los estudiantes se correlaciona con un menor rendimiento en las pruebas rendidas por ellos (Musser, 2011).

- **Repitencia** Variable que indica si el estudiante ha repetido alguna vez en su trayectoria escolar. En relación al impacto que tiene la repitencia sobre el logro de aprendizajes, esta encuentra amplio sustento en la evidencia académica (ver entre otros Heyneman y Loxley, 1982 y 1983; Gómez-Neto y Hanushek, 1992; Cotton, 1995; Marzano, 2000; McEwan y Shapiro, 2007). De acuerdo a los autores, el hecho de repetir de curso, sea aislada o reiteradamente, afecta el logro de aprendizajes no directamente, sino por la vía de afectar, entre otras dimensiones, el autoconcepto académico de los estudiantes y la experiencia escolar en su conjunto. Por otra parte, en Chile, Cerón y Lara (2011), muestran que la repitencia está asociada a puntajes considerablemente más bajos –17 puntos– en la prueba SIMCE Matemática 4.° básico 2010.

- **Género** Variable contextual que reporta el género del estudiante. En Matemática, en la mayoría de los países, los hombres obtienen resultados más altos que las mujeres en los niveles de cuarto y octavo (pruebas TIMSS de 2003 y 2011, y PISA de 2006 y 2009). En el caso de Chile, la brecha favorable para los hombres en la prueba de Matemática es superior al promedio de los países participantes (Cabezas, 2010). Esta tendencia se mantiene hasta hoy, y en los resultados de las pruebas TIMSS recientemente publicados se ve que las brechas en Chile son mucho mayores que las observadas en el resto de los países en estudio (Agencia de Calidad de la Educación, 2012c).

Nivel Establecimiento

- **Expectativas de los docentes** Variables que miden el mayor nivel educativo esperado por el docente para el conjunto de estudiantes que rindió la prueba Simce en el curso donde él realiza clases. En los resultados de la prueba TIMSS 2011, las expectativas de los profesores se midieron, junto a otras variables relacionadas, dentro de la escala "Énfasis de la escuela en el éxito académico" (School Emphasis on Academic Success) y dicha escala mostró una relación positiva con los resultados de logros en Matemática de los estudiantes, es decir, los estudiantes obtienen mejores resultados cuando sus establecimientos dan más énfasis al éxito académico incluyendo que los docentes tuvieran altas expectativas académicas respecto a sus alumnos (Mullis et al. 2012). Otra investigación desarrollada en Estados Unidos muestra que las expectativas del profesor respecto del rendimiento de sus estudiantes de primer grado tienen un efecto en el aprendizaje de estos (Palardy y Rumberger, 2008). Finalmente, un estudio realizado en Chile mostró que las expectativas académicas de los docentes acerca de sus estudiantes se correlacionan positivamente con el rendimiento académico de estos últimos, tanto en los distintos subsectores de aprendizaje, como en el promedio general de logro (Rojas, 2005). La expectativa, en cualquier caso, es una variable retroalimentada por el propio logro del estudiante a lo largo de su proceso educativo, por lo que resulta difícil aislar la endogeneidad del efecto exógeno.

- **Orden en el aula** Índice que mide la percepción del docente sobre el comportamiento de los estudiantes en la sala de clases. De acuerdo al estudio de casos llevado a cabo por Bellei et al. (2004), los establecimientos educativos que logran ser efectivos destinan importantes esfuerzos a la gestión del orden y la disciplina en la sala de clases, planteándola como una condición indispensable para que los estudiantes puedan aprender. Un mal manejo de la convivencia escolar afecta la motivación, el rendimiento, la adquisición de habilidades cognitivas, el aprendizaje efectivo y el desarrollo de actitudes positivas hacia el estudio y aprendizaje (Muijs y Reynolds, 2005; Fleming et al., 2005; Devine y Cohen, 2007; Stewart, 2008).

- **Conducta de los estudiantes en el establecimiento** Índice que mide la percepción del docente sobre el comportamiento de los estudiantes entre sí y en el establecimiento. Los resultados del Segundo Estudio Regional de la Calidad de la Educación (SERCE) indican que el clima escolar tiene efectos positivos sobre el rendimiento de los estudiantes en la mayor parte de los países de América Latina y el Caribe. Los resultados de PISA 2009 también señalan que los estudiantes tienen mejor desempeño escolar cuando se encuentran en buenos ambientes de aprendizaje. Las investigaciones muestran que los establecimientos efectivos generan conscientemente un clima positivo y seguro, como también una comunidad ordenada que se expresa en altos niveles de cohesión y espíritu de equipo entre profesores, profesores y estudiantes, y entre estudiantes. En esta misma línea, evidencia más reciente indica que el tipo de relaciones que se observa en el aula, y que sustentan o no un clima de aula positivo, afecta el aprendizaje (Chiew Goh et al., 1995; Tubbs y Garner, 2008). Se requiere de un clima escolar donde las relaciones de convivencia entre sus miembros sean respetuosas, solidarias y democráticas para el logro de aprendizajes de calidad en los estudiantes (OECD, 2010).

- **Cobertura curricular** Evidencia de las pruebas SIMCE 2010 señala una relación positiva entre cobertura curricular y resultados de aprendizaje (MINEDUC, Unidad de Currículum y Evaluación, 2011). En el ámbito internacional, los resultados de la prueba TIMSS 2011 también confirman esta asociación (Mullis et al., 2012).

  La cobertura curricular se mide por área de aprendizaje:

  Algebra Índice que mide el desarrollo de contenidos de álgebra reportado por el docente a los estudiantes que rindieron la prueba Simce.

  Geometría Índice que mide el desarrollo de contenidos en geometría reportado por el docente a los estudiantes que rindieron la prueba Simce.

  Números Índice que mide el desarrollo de contenidos en números reportado por el docente a los estudiantes que rindieron la prueba Simce.

  Datos y Azar Índice que mide el desarrollo de contenidos en datos y azar reportado por el docente a los estudiantes que rindieron la prueba Simce.

- **Dependencia cruzada por Grupo Socioeconómico (GSE[9]) del establecimiento** Distintas variables contextuales que indican la dependencia administrativa y el GSE del establecimiento. La importancia de esta dimensión está fundada en la evidencia acumulada tanto a nivel nacional como internacional, que demuestra que explica parte importante de la varianza en resultados entre distintos estudiantes, establecimientos y grupos de establecimientos. Evidencia de esto la constituyen los índices de caracterización socioeconómica de las pruebas internacionales como PISA 2009 (OCDE, 2010), TIMSS 2011 (Mullis et al.2012) y SERCE (UNESCO-OREALC, 2010).

[9] El Grupo Socioeconómico o GSE corresponde a la la clasificación socioeconómica de los establecimientos que rinden la prueba SIMCE. Para detalle de su construcción, ver documento técnico Metodología de Construcción de Grupos Socioeconómicos SIMCE 2012, disponible en `http://www.agenciaeducacion.cl/wp-content/uploads/2013/02/Metodologia-de-Construccion-de-Grupos-Socioeconomicos-SIMCE-2012.pdf`

3. Construcción de las variables

Las variables utilizadas fueron construidas de tres formas distintas. Por un lado, se elaboraron índices a partir de la aplicación de un análisis factorial a las respuestas obtenidas en los Cuestionarios de Estudiantes, Docentes y Padres y apoderados. Con esta metodología, a nivel estudiante se construyeron los índices de Motivación en Matemática, Autovaloración en Matemática, Autopercepción académica, Nivel socioeconómico y Recursos educativos en el hogar. A nivel de establecimientos se construyeron los índices de Cobertura curricular en Números, Geometría, Datos y azar y Álgebra, Orden en el aula y Conducta de los estudiantes en el establecimiento. Como se puede ver en el Cuadro 2, los índices construidos tienen una media aproximada de 0 cero y una desviación estándar cercana a la unidad.

Adicionalmente, se generaron variables por construcción escalar o sumativa. Estas últimas corresponden a la Repitencia o no de los alumnos, las Expectativas de padres y docentes respecto del nivel máximo de estudio que alcanzarán los alumnos y la Valoración docente por parte de los padres. Salvo la variable de Expectativas docentes, que está a nivel de establecimiento, el resto de ellas están a nivel de estudiante. Todas son variables dicotómicas, cero y uno, salvo la Valoración docente por parte de los padres, que es una variable continua entre uno y siete.

Finalmente, 13 variables dicotómicas se obtuvieron directamente de registros administrativos. Estas son: género, asistencia y 11 combinaciones de dependencia con grupo socioeconómico.

El grupo de referencia para las variables dicotómicas a nivel estudiante, corresponde a los alumnos cuya asistencia es igual o menor al 80 %, son de género femenino, nunca han repetido, y sus padres tienen la expectativa de que el mayor nivel de estudio que alcanzarán será IV medio o menos. A nivel de establecimiento, el grupo de referencia son los municipalizados de nivel socioeconómico bajo, donde los docentes tienen la expectativa de que los alumnos de su curso estudiarán solo hasta IV medio o menos.

3.1. Índices obtenidos por construcción factorial

Todos los índices a continuación expuestos son construidos por aplicación de análisis factorial, utilizando la matriz de correlaciones y haciendo uso del método de componentes principales con rotación varimax –cuando hay más de una componente[10]– y asignación de las puntuaciones a través del método de regresión, aplicando

[10] De los ocho índices construidos, solo uno tiene más de una componente, el conjunto de ítems referidos a la cobertura curricular del establecimiento.

las cargas factoriales resultantes del método multivariado[11].

Esta técnica se utiliza para reducir el número de variables de un conjunto de datos en un número menor de "dimensiones". En términos matemáticos, cuando se tiene un número n de variables correlacionadas, este método crea índices o componentes no correlacionados donde cada componente es una combinación lineal de las variables iniciales.

En nuestro caso, nos quedaremos con la primera combinación lineal, la que tiene la mayor cantidad de varianza explicada. Este tipo de construcción que se apoya en técnicas como el análisis factorial, es bastante utilizada[12]. A continuación se detallan los índices obtenidos.

3.1.1. Motivación por Aprendizaje en Educación Matemática

Este índice es construido a partir de tres ítems del Cuestionario de Estudiantes. Con un KMO=0,703 y prueba de Bartlett significativa[13], se realiza el análisis factorial y luego se construye el índice. La forma de construirlo es mediante el producto de la matriz de las variables observadas estandarizadas[14] en dichos ítems y la matriz de coeficientes para el cálculo de la primera componente, que explica el 76 % de la varianza.

$$MotMat = X_{n\times 3} \times C_{3\times 1}$$

Donde $MotMat$ es una matriz de dimensiones $n \times 1$ que contiene el valor del índice de motivación en Matemáticas para cada estudiante. $X_{n\times 3}$ es la matriz de observaciones estandarizadas de los n estudiantes para los 3 ítems. Y $C_{3\times 1}$ es la matriz de coeficientes, de dimensiones 3×1, la cual contiene los coeficientes para las puntuaciones factoriales de cada uno de los ítems.

La importancia de cada uno de los tres ítems incluidos en el índice es bastante equitativa, lo lo cual se puede observar en la expresión lineal que define el valor del índice de Motivación en Matemáticas.

Para cada estudiante, el índice es:

$$MotMat_i = 0,361 \times X_{i1} + 0,388 \times X_{i2} + 0,395 \times X_{i3} \tag{1}$$

Donde, X_{ik} es el valor observable estandarizado para el estudiante i en el ítem k.

Para $i = 1 \ldots n$ estudiantes y $k = 1, 2, 3$ referido a los ítems incluidos en el índice.

[11] Detalle de esta metodología es posible encontrarla en el Anexo de este documento de trabajo.

[12] Para más detalle ver Vyas y Kumaranayake, 2006.

[13] Ver el Anexo para la metodología de ambas medidas de viabilidad de análisis factorial.

[14] La información recolectada a partir de los ítems de los distintos cuestionarios, es estandarizada con el propósito de llevar a la misma escala ítems que pudiesen tener una escala distinta.

3.1.2. Autovaloración en Matemáticas

Este índice es construido a partir de cuatro ítems del cuestionario de Estudiantes. Con un KMO=0,810 y prueba de Bartlett significativa, se realiza el análisis factorial. El índice se construye con el producto de la matriz de las variables observadas estandarizadas y la matriz de coeficientes para el cálculo de las puntuaciones en la primera componente, que explica el 72 % de la varianza.

$$AutoValM = X_{n\times 4} \times C_{4\times 1}$$

Donde $AutoValM$ es una matriz de dimensiones $n\times 1$ que contiene el valor del índice de autovaloración académica en Matemáticas para cada estudiante. $X_{n\times 4}$ es la matriz de observaciones estandarizadas de los n estudiantes en los 4 ítems. Y $C_{4\times 1}$ es la matriz de coeficientes, de dimensiones 4×1, la cual contiene los coeficientes para las puntuaciones factoriales de cada uno de los ítems.

La importancia de cada uno de los cuatro ítems incluidos en el índice es bastante equitativa, lo cual se puede observar en la siguiente expresión lineal que define el valor del índice de Autovaloración en Matemáticas para cada estudiante:

$$AutoValM_i = 0,299 \times X_{i1} + 0,306 \times X_{i2} + 0,313 \times X_{i3} + 0,260 \times X_{i4} \tag{2}$$

Donde, X_{ik} es el valor observable estandarizado para el estudiante i en el ítem k.

Para $i = 1 \ldots n$ estudiantes y $k = 1, 2, 3, 4$ referido a los ítems incluidos en el índice.

3.1.3. Autopercepción Académica

Este índice es construido a partir de tres ítems del cuestionario de Estudiantes. Con un KMO=0,565 y prueba de Bartlett significativa, se realiza el análisis factorial con los ítems. Se construye el índice empleando el producto de la matriz de las variables observadas estandarizadas y la matriz de coeficientes para el cálculo de las puntuaciones en la primera componente, que explica el 52 % de la varianza total.

$$AutopAcad = X_{n\times 3} \times C_{3\times 1}$$

Donde $AutopAcad$ es una matriz de dimensiones $n \times 1$ que contiene el valor del índice de autopercepción académica para cada estudiante.$X_{n\times 3}$ es la matriz de observaciones estandarizadas de los n estudiantes para los 3 ítems considerados en la construcción del índice. Y $C_{3\times 1}$ es la matriz de coeficientes, de dimensiones 3×1, la cual contiene los coeficientes para las puntuaciones factoriales de cada uno de los ítems.

Para cada estudiante, la función lineal que define el valor del índice de Autopercepción Académica es la siguiente:

$$AutopAcad_i = 0,477 \times X_{i1} + 0,522 \times X_{i2} + 0,381 \times X_{i3} \tag{3}$$

Donde, X_{ik} es el valor observable estandarizado para el estudiante i en el ítem k.
Para $i = 1 \ldots n$ estudiantes y $k = 1, 2, 3$ referido a los ítems incluidos en el índice.

3.1.4. Nivel socioeconómico del estudiante

Este índice es construido a partir de tres preguntas del Cuestionario de Padres y apoderados. Con un KMO=0,715 y prueba de Bartlett significativa, se realiza el análisis factorial con los ítems. La forma de construir el índice es empleando el producto de la matriz de las variables observadas estandarizadas y la matriz de coeficientes para el cálculo de las puntuaciones en la primera componente, que explica el 74 % de la varianza.

$$NSE = X_{n\times 3} \times C_{3\times 1}$$

Donde NSE es una matriz de dimensiones $n \times 1$ que contiene el valor del índice de nivel socioeconómico del hogar, para cada estudiante.$X_{n\times 3}$ es la matriz de observaciones estandarizadas de los n estudiantes para los 3 ítems. Y $C_{3\times 1}$ es la matriz de coeficientes, de dimensiones 3×1, la cual contiene los coeficientes para las puntuaciones factoriales de cada uno de los ítems.

La importancia de cada uno de los tres ítems incluidos en el índice es bastante equitativa. Para cada estudiante, la función lineal que define el valor del índice de nivel socioeconómico del hogar es la siguiente:

$$NSE_i = 0,396 \times X_{i1} + 0,389 \times X_{i2} + 0,379 \times X_{i3} \tag{4}$$

Donde, X_{ik} es el valor observable estandarizado para el estudiante i en el ítem k.
Para $i = 1 \ldots n$ estudiantes y $k = 1, 2, 3$ referido a los ítems incluidos en el índice.

3.1.5. Recursos educativos en el hogar

Este índice es construido a partir de tres preguntas del Cuestionario de Padres y apoderados. Con un KMO=0,587 y prueba de Bartlett significativa, se realiza el análisis factorial con los ítems. Para construir el índice se emplea el producto de la matriz de las variables observadas estandarizadas y la matriz de coeficientes para el cálculo de la primera componente, que explica el 60 % de la varianza total.

$$RecEH = X_{n\times 3} \times C_{3\times 1}$$

Donde $RecEH$ es una matriz de dimensiones $n \times 1$ que contiene el valor del índice de recursos educativos en el hogar, para cada estudiante.$X_{n\times 3}$ es la matriz de observaciones estandarizadas de los n estudiantes para los 3 ítems. Y $C_{3\times 1}$ es la matriz de coeficientes, de dimensiones 3×1, la cual contiene los coeficientes para las puntuaciones factoriales de cada uno de los ítems.

Para cada estudiante, la función lineal que define el valor del índice de nivel socioeconómico del hogar es la siguiente:

$$RecEH_i = 0,467 \times X_{i1} + 0,477 \times X_{i2} + 0,336 \times X_{i3} \tag{5}$$

Donde, X_{ik} es el valor observable estandarizado para el estudiante i en el ítem k.

Para $i = 1 \dots n$ estudiantes y $k = 1, 2, 3$ referido a los ítems incluidos en el índice.

3.1.6. Conducta de los estudiantes en el establecimiento

Este índice es construido a partir de once ítems del Cuestionario de Docentes de Matemática. Con un KMO=0,936 y prueba de Bartlett significativa, se realiza el análisis factorial con los ítems. La forma de construir el índice es mediante el producto de la matriz de las variables observadas estandarizadas y la matriz de coeficientes para el cálculo de las puntuaciones en la primera componente, que logra explicar el 57 % de la varianza.

$$CondEstd = X_{n\times 11} \times C_{11\times 1}$$

Donde $CondEstd$ es una matriz de dimensiones $n \times 1$ que contiene el valor del índice de conducta de los estudiantes en el establecimiento, para cada estudiante. $X_{n\times 11}$ es la matriz de observaciones estandarizadas de los n estudiantes para los 3 ítems. Y $C_{11\times 1}$ es la matriz de coeficientes, de dimensiones 11×1, la cual contiene los coeficientes para las puntuaciones factoriales de cada uno de los ítems.

Para cada estudiante, la función lineal que define el valor del índice de nivel socioeconómico del hogar es la siguiente:

$$\begin{aligned} CondEstd_i &= 0,122 \times X_{i1} + 0,113 \times X_{i2} + 0,124 \times X_{i3} + 0,131 \times X_{i4} + 0,129 \times X_{i5} + 0,112 \times X_{i6} \\ &\quad +0,108 \times X_{i7} + 0,125 \times X_{i8} + 0,124 \times X_{i9} + 0,114 \times X_{i10} + 0,119 \times X_{i11} \end{aligned}$$

Donde, X_{ik} es el valor observable estandarizado para el estudiante i en el ítem k.

Para $i = 1 \dots n$ estudiantes y $k = 1, 2, \dots, 11$ referido a los ítems incluidos en el índice.

3.1.7. Cobertura Curricular

Estas cuatro variables son construidas a partir de 16 ítems del Cuestionario de Docentes de Matemática, en la cual se evalúa el grado de cobertura en diversos contenidos curriculares (Álgebra, Geometría, Números y

Datos y azar). Con un KMO=0,816 y prueba de Bartlett significativa, se realiza el análisis factorial con los ítems. Se construye el índice con el producto de la matriz de las variables observadas estandarizadas y la matriz de coeficientes para el cálculo de las puntuaciones en las componentes. En conjunto, las cuatro componentes explican el 72 % de la variabilidad.

En este caso, $CobCurri$ es una matriz de dimensiones $n \times 4$, la que contiene, para cada estudiante, el valor del índice en cada uno de los cuatro contenidos curriculares, $X_{n\times16}$ es la matriz de observaciones estandarizadas de los n estudiantes para los 16 ítems que contiene la pregunta respectiva. $C_{16\times4}$ es la matriz de coeficientes, de dimensiones 16×4, la cual contiene los coeficientes para las puntuaciones factoriales de cada uno de los ítems, para las cuatro componentes, es decir, los cuatro ejes temáticos evaluados.

$$CobCurri_{n\times4} \equiv \begin{bmatrix} Numeros_{n\times1} & Geometria_{n\times1} & Algebra_{n\times1} & DatosAzar_{n\times1} \end{bmatrix}$$

$$CobCurri_{n\times4} = X_{n\times16} \times C_{16\times4}$$

- Para el índice de cobertura curricular en Números

$$\begin{aligned} Numeros_i \quad = \quad & -0,082 \times X_{i1} - 0,091 \times X_{i2} - 0,041 \times X_{i3} + 0,019 \times X_{i4} + 0,299 \times X_{i5} + 0,306 \times X_{i6} \\ & +0,220 \times X_{i7} + 0,298 \times X_{i8} + 0,254 \times X_{i9} - 0,045 \times X_{i10} - 0,054 \times X_{i11} - 0,052 \times X_{i12} \\ & -0,013 \times X_{i13} - 0,033 \times X_{i14} - 0,038 \times X_{i15} - 0,037 \times X_{i16} \end{aligned}$$

- Para el índice de cobertura curricular en Geometría

$$\begin{aligned} Geometria_i \quad = \quad & -0,027 \times X_{i1} - 0,025 \times X_{i2} - 0,026 \times X_{i3} + 0,020 \times X_{i4} - 0,044 \times X_{i5} - 0,054 \times X_{i6} \\ & -0,011 \times X_{i7} - 0,051 \times X_{i8} - 0,027 \times X_{i9} + 0,338 \times X_{i10} + 0,347 \times X_{i11} + 0,323 \times X_{i12} \\ & +0,200 \times X_{i13} - 0,037 \times X_{i14} - 0,038 \times X_{i15} - 0,038 \times X_{i16} \end{aligned}$$

- Para el índice de cobertura curricular en Álgebra

$$\begin{aligned} Algebra_i \quad = \quad & 0,381 \times X_{i1} + 0,389 \times X_{i2} + 0,332 \times X_{i3} + 0,110 \times X_{i4} - 0,084 \times X_{i5} - 0,076 \times X_{i6} \\ & -0,037 \times X_{i7} - 0,039 \times X_{i8} - 0,024 \times X_{i9} - 0,024 \times X_{i10} - 0,022 \times X_{i11} - 0,016 \times X_{i12} \\ & +0,001 \times X_{i13} + 0,000 \times X_{i14} - 0,002 \times X_{i15} + 0,005 \times X_{i16} \end{aligned}$$

- Para el índice de cobertura curricular en Datos y azar

$$\begin{aligned} DatosAzar_i \quad = \quad & -0,012 \times X_{i1} - 0,003 \times X_{i2} - 0,001 \times X_{i3} + 0,017 \times X_{i4} - 0,014 \times X_{i5} - 0,022 \times X_{i6} \\ & +0,009 \times X_{i7} - 0,063 \times X_{i8} - 0,050 \times X_{i9} - 0,058 \times X_{i10} - 0,061 \times X_{i11} - 0,036 \times X_{i12} \\ & +0,028 \times X_{i13} + 0,360 \times X_{i14} + 0,368 \times X_{i15} + 0,352 \times X_{i16} \end{aligned}$$

Donde, X_{ik} es el valor observable estandarizado para el estudiante i en el ítem k.

Para $i = 1 \dots n$ estudiantes y $k = 1, 2, \dots, 16$ referido a los ítems incluidos en el índice.

3.1.8. Orden en el aula

Este índice es construido a partir de 7 ítems del cuestionario de Docentes de Matemática. Con un KMO=0,875 y prueba de Bartlett significativa, se realiza el análisis factorial con los ítems. La forma de construir el índice es mediante el producto de la matriz de las variables observadas estandarizadas y la matriz de coeficientes para el cálculo de las puntuaciones en la primera componente, la que explica el 56 % de la varianza.

$$OrdAula_j = X_{n\times 7} \times C_{7\times 1}$$

Donde $OrdAula$ es una matriz de dimensiones $n \times 1$ que contiene el valor del índice de orden en el aula, para cada estudiante, aunque es el curso entero que obtiene el mismo valor. La matriz $X_{n\times 7}$ corresponde a las observaciones estandarizadas de los n estudiantes para los siete ítems y $C_{7\times 1}$ es la matriz de coeficientes, de dimensiones 7×1, la cual contiene los coeficientes para las puntuaciones factoriales de cada uno de los ítems.

Para cada estudiante, la función lineal que define el valor del índice orden en el aula es la siguiente:

$$OrdAula_i = 0,192\times X_{i1} + 0,206\times X_{i2} + 0,151\times X_{i3} + 0,200\times X_{i4} + 0,204\times X_{i5} + 0,199\times X_{i6} + 0,179\times X_{i7} \quad (6)$$

Donde, X_{ik} es el valor observable estandarizado para el estudiante i en el ítem k.

Para $i = 1 \dots n$ estudiantes y $k = 1, 2, \dots, 7$ referido a los ítems incluidos en el índice.

3.2. Variables obtenidas por construcción escalar o sumativa

3.2.1. Repitencia

A partir del Cuestionario de Padres y apoderados, se construye la variable dicotómica Repitencia, de modo que el valor 1 se asigna al evento de haber repetido una o más veces.

$$Repitencia_i = \begin{cases} 0 & \text{Nunca ha repetido} \\ 1 & \text{Ha repetido una o más veces} \end{cases} \quad (7)$$

para $i = 1 \dots n$ estudiantes.

3.2.2. Valoración docente

Corresponde a una pregunta del Cuestionario de Padres, donde los padres evalúan la calidad de enseñanza entregada por los profesores del estudiante en la asignatura de Matemática, con una nota de 1 a 7.

Por lo tanto, la variable $ValDoc$ para cada estudiante es un número entero comprendido entre 1 y 7.

$$ValDoc_j \in N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \tag{8}$$

3.2.3. Expectativas de los padres

Se trabaja con 3 variables construidas a partir del mayor nivel de educación esperado para el estudiante, por parte de los padres.

$$ExpPad = \begin{cases} \text{No creo que complete 4° año de educación media} \\ \text{Completará 4° año de educación técnico-profesional} \\ \text{Completará 4° año de educación cientíifico-humanista} \\ \text{Completará una carrera en un centro de formación técnica} \\ \text{Completará una carrera en una Universidad} \\ \text{Completará estudios de postgrado} \end{cases}$$

$$ExpPad1 = \begin{cases} 0 & ExpPad \neq \text{Completará una carrera en un centro de formación técnica} \\ 1 & ExpPad = \text{Completará una carrera en un centro de formación técnica} \end{cases} \tag{9}$$

$$ExpPad2 = \begin{cases} 0 & ExpPad \neq \text{Completará una carrera en una Universidad} \\ 1 & ExpPad = \text{Completará una carrera en una Universidad} \end{cases} \tag{10}$$

$$ExpPad3 = \begin{cases} 0 & ExpPad \neq \text{Completará estudios de postgrado} \\ 1 & ExpPad = \text{Completará estudios de postgrado} \end{cases} \tag{11}$$

El grupo de referencia, es decir, cuando $ExpPad1 = 0$,$ExpPad1 = 0$ y $ExpPad1 = 0$ corresponde a las categorías: “No creo que complete 4° año de educación media” o “Completará 4° año de educación técnico-profesional” o “Completará 4° año de educación científico-humanista”.

3.2.4. Expectativas de los docentes

Se trabaja con 3 variables, construidas a partir del mayor nivel de educación esperado para el estudiante, por parte del docente de Matemática del alumno.

$$ExpPad = \begin{cases} \text{No creo que complete 4° año de educación media} \\ \text{Completará 4° año de educación técnico-profesional} \\ \text{Completará 4° año de educación cientíifico-humanista} \\ \text{Completará una carrera en un centro de formación técnica} \\ \text{Completará una carrera en una Universidad} \\ \text{Completará estudios de postgrado} \end{cases}$$

$$ExpPad1 = \begin{cases} 0 & ExpPad \neq \text{Completará una carrera en un centro de formación técnica} \\ 1 & ExpPad = \text{Completará una carrera en un centro de formación técnica} \end{cases} \quad (12)$$

$$ExpPad2 = \begin{cases} 0 & ExpPad \neq \text{Completará una carrera en una Universidad} \\ 1 & ExpPad = \text{Completará una carrera en una Universidad} \end{cases} \quad (13)$$

$$ExpPad3 = \begin{cases} 0 & ExpPad \neq \text{Completará estudios de postgrado} \\ 1 & ExpPad = \text{Completará estudios de postgrado} \end{cases} \quad (14)$$

El grupo de referencia, es decir, cuando $ExpPad1 = 0$,$ExpPad1 = 0$ y $ExpPad1 = 0$ corresponde a las categorías: "No creo que complete 4° año de educación media" o "Completará 4° año de educación técnico-profesional" o "Completará 4° año de educación científico-humanista".

3.3. Variables obtenidas de registros administrativos

3.3.1. Género

A partir de los registros administrativos del Ministerio de Educación se recodifica está variable de la siguiente manera:

$$Genero_i = \begin{cases} 0 & \text{Si género estudiante es Femenino} \\ 1 & \text{Si género estudiante es Masculino} \end{cases} \quad (15)$$

para los $i = 1 \dots n$ estudiantes. Luego, la categoría de referencia serán las estudiantes de género femenino.

3.3.2. Asistencia

De los registros administrativos del Ministerio de Educación se obtiene el porcentaje de asistencia de cada estudiante. Este se recodifica en dos categorías, donde el valor 1 indica que el estudiante tiene una asistencia mayor a 80 %.

$$Asistencia_i = \begin{cases} 0 & \text{si porcentaje de asistencia del alumno} \leq 80\,\% \\ 1 & \text{si porcentaje de asistencia del alumno} > 80\,\% \end{cases} \quad (16)$$

Donde $i = 1 \dots n$ estudiantes. El 74 % de los alumnos tiene una asistencia por sobre el 80 %.

3.3.3. Dependencia cruzada por GSE

Dentro de las variables contextuales se decidió construir la variable **Dependencia-GSE**, para explicar de mejor manera el rendimiento de los estudiantes. Esta variable considera la interdependencia existente entre Grupo Socioeconómico y Dependencia Administrativa de los establecimientos. De esta manera se trabaja con variables que consideran la dependencia y el GSE del establecimiento en forma conjunta. Se escogió como categoría de referencia a los establecimientos municipales de GSE bajo.

En el cuadro 1 se indica si hay o no establecimientos para las 15 combinaciones posibles. Si se consideran ambas características, existen 12 tipos de establecimientos. No hay establecimientos de dependencia particular pagado con GSE bajo o medio bajo y tampoco de dependencia municipal de GSE alto.

Cuadro 1: Grupo Socioeconómico y Dependencia Administrativa

GSE / Dependencia	Grupo Bajo	Grupo Medio Bajo	Grupo Medio	Medio Alto	Grupo Alto
Municipal	Si	Si	Si	Si	No
Particular Subvencionado	Si	Si	S	S	Si
Particular Pagado	No	No	Si	Si	Si

Se crearon 11 variables indicadoras, las que reportan la dependencia y el GSE al cual pertenece el establecimiento en el cual estudia el alumno[15].

$$DepGSE1 = \begin{cases} 0; \text{si Dependencia} \neq \text{ Part.subv y GSE} \neq \text{ Bajo} \\ 1; \text{si Dependencia} = \text{ Part.subv y GSE} = \text{ Bajo} \end{cases} \tag{17}$$

$$DepGSE2 = \begin{cases} 0; \text{si Dependencia} \neq \text{ Municipal y GSE} \neq \text{ Medio bajo} \\ 1; \text{si Dependencia} = \text{ Municipal y GSE} = \text{ Medio bajo} \end{cases} \tag{18}$$

$$DepGSE3 = \begin{cases} 0; \text{si Dependencia} \neq \text{ Part.subv y GSE} \neq \text{ Medio bajo} \\ 1; \text{si Dependencia} = \text{ Part.subv y GSE} = \text{ Medio bajo} \end{cases} \tag{19}$$

$$DepGSE4 = \begin{cases} 0; \text{si Dependencia} \neq \text{ Municipal y GSE} \neq \text{ Medio} \\ 1; \text{si Dependencia} = \text{ Municipal y GSE} = \text{ Medio} \end{cases} \tag{20}$$

$$DepGSE5 = \begin{cases} 0; \text{si Dependencia} \neq \text{ Part.subv y GSE} \neq \text{ Medio} \\ 1; \text{si Dependencia} = \text{ Part.subv y GSE} = \text{ Medio} \end{cases} \tag{21}$$

$$DepGSE6 = \begin{cases} 0; \text{si Dependencia} \neq \text{ Part.pag y GSE} \neq \text{Medio} \\ 1; \text{si Dependencia} = \text{ Part.pag y GSE} = \text{ Medio} \end{cases} \tag{22}$$

$$DepGSE7 = \begin{cases} 0; \text{si Dependencia} \neq \text{ Municipal y GSE} \neq \text{Medio Alto} \\ 1; \text{si Dependencia} = \text{Municipal y GSE} = \text{ Medio Alto} \end{cases} \tag{23}$$

$$DepGSE8 = \begin{cases} 0; \text{si Dependencia} \neq \text{ Part.subv y GSE} \neq \text{ Medio Alto} \\ 1; \text{si Dependencia} = \text{ Part.subv y GSE} = \text{ Medio Alto} \end{cases} \tag{24}$$

[15] Dependencia-GSE: Toma 12 valores efectivos de 15 posibles para la combinación de las tres variables dependencia (municipal, particular subvencionado, particular pagado) y cinco GSE (bajo, medio bajo, medio, medio alto, alto), ya que no hay establecimientos para la combinación particular pagado en el grupo A y grupo B, y municipal en el grupo E.

$$DepGSE9 = \begin{cases} 0; \text{si Dependencia} \neq \text{ Part.pag y GSE} \neq \text{ Medio Alto} \\ 1; \text{si Dependencia} = \text{ Part.pag y GSE} = \text{ Medio Alto} \end{cases} \tag{25}$$

$$DepGSE10 = \begin{cases} 0; \text{si Dependencia} \neq \text{ Part.subv y GSE} \neq \text{ Alto} \\ 1; \text{si Dependencia} = \text{ Part.subv y GSE} = \text{ Alto} \end{cases} \tag{26}$$

$$DepGSE11 = \begin{cases} 0; \text{si Dependencia} \neq \text{ Part.pag y GSE} \neq \text{ Alto} \\ 1; \text{si Dependencia} = \text{ Part.pag y GSE} = \text{Alto} \end{cases} \tag{27}$$

El valor de referencia, es decir, cuando las 11 variables anteriores toman el valor cero, representa a los establecimientos de dependencia municipal y GSE bajo. Los coeficientes estimados para las variables anteriores son interpretables respecto de los resultados de este grupo.

El cuadro 2 presenta de manera resumida la información descriptiva de las variables utilizadas en el modelo de factores asociados.

Cuadro 2: Descriptivos de variables empleadas

Variables nivel 1: Estudiante	$N.^{\circ}$	Media	Desv. Est.	Mín	Máx
Asistencia >80 %	206241	0,7	0,4	0,0	1,0
Motivación en matemáticas	206241	0,0	0,9	-2,0	1,6
Autovaloración en matemáticas	206241	0,0	0,9	-2,3	1,8
Autopercepción académica	206241	0,0	0,9	-3,5	1,7
Repitencia	206241	0,2	0,4	0,0	1,0
Expectativas padres: Carrera en IP	206241	0,1	0,3	0,0	1,0
Expectativas padres: Carrera en U	206241	0,5	0,5	0,0	1,0
Expectativas padres: Postgrado	206241	0,1	0,3	0,0	1,0
Calificación docente	206241	5,7	1,2	1,0	7,0
Nivel socioeconómico estudiante	206241	0,0	0,9	-2,9	2,6
Recursos educativos en el hogar	206241	0,0	0,9	-2,7	1,1
Género	206241	0,5	0,5	0,0	1,0
Variables nivel 2: Establecimiento	**N**	**Media**	**SD**	**Min**	**Max**
Expectativas docentes: Carrera en IP	2770	0,3	0,4	0,0	1,0
Expectativas docentes: Carrera en U	2770	0,4	0,5	0,0	1,0
Expectativas docentes: Postgrado	2770	0,0	0,1	0,0	1,0
Particular Subvencionado, grupo A	2770	0,1	0,3	0,0	1,0
Municipalizado, grupo B	2770	0,1	0,3	0,0	1,0
Particular Subvencionado, grupo B	2770	0,2	0,4	0,0	1,0
Municipalizado, grupo C	2770	0,0	0,1	0,0	1,0
Particular Subvencionado, grupo C	2770	0,2	0,4	0,0	1,0
Particular Pagado, grupo C	2770	0,0	0,0	0,0	1,0
Municipalizado, grupo D	2770	0,0	0,0	0,0	1,0
Particular Subvencionado, grupo D	2770	0,1	0,3	0,0	1,0
Particular Pagado, grupo D	2770	0,0	0,1	0,0	1,0
Particular Subvencionado, grupo E	2770	0,0	0,1	0,0	1,0
Particular Pagado, grupo E	2770	0,1	0,3	0,0	1,0
Números	2770	0,0	0,7	-2,8	2,2
Geometría	2770	0,0	0,7	-2,4	1,7
Datos y azar	2770	0,0	0,7	-1,7	2,0
Algebra	2770	0,1	0,7	-3,2	1,6
Orden en el aula	2770	0,0	0,8	-3,1	1,9
Conducta de los estudiantes en el Estab.	2770	0,1	0,8	-3,4	1,7

4. Modelo Lineal Jerárquico (HLM)

4.1. Definición del Modelo

Los modelos lineales jerárquicos (HLM, hierarchical linear model) se ajustan de mejor forma que los modelos estadísticos tradicionales para el análisis de datos educacionales, pues permiten dar cuenta de la estructura anidada de los datos, organizados en este caso en dos niveles: los establecimientos y sus estudiantes.
La idea que subyace a tales modelos es que los datos procedentes de la realidad educativa tienen estructura jerárquica o en niveles. La estructura anidada reconoce que los datos provienen de distintos niveles de agregación. Obviar este hecho puede invalidar las técnicas de análisis estadístico tradicionales usadas en la investigación sobre factores asociados (Hox, 1998; Goldstein, 2003). Las pruebas estadísticas descansan en el supuesto de independencia de las observaciones y, dado que compartir el mismo contexto causa su dependencia, los errores estándar estimados de las pruebas estadísticas tradicionales podrían estar subestimados (Hox, 1995).

En **nivel 1** o nivel estudiante, se encuentran todas las variables que son propias de los estudiantes y que no necesariamente son comunes entre los de un mismo establecimiento. En el **nivel 2** o nivel establecimiento, están las variables explicativas que sí son iguales para todos los alumnos de un mismo establecimiento, como por ejemplo, la variable dependencia cruzada por GSE o la cobertura curricular del docente.

El modelo utilizado, con las variables anteriormente descritas, es el siguiente:

Nivel 1, Estudiante

$$\begin{aligned} SimceMat_{ij} &= \beta_{0j} + \beta_{1j} Asistencia_j + \beta_{2j} MotMat_j + \beta_{3j} AutoValM_j + \beta_{4j} AutopAcad_j + \beta_{5j} Repitencia_j \\ &\quad + \beta_{6j} ExpPad1_j + \beta_{7j} ExpPad2_j + \beta_{8j} ExpPad3_j + \beta_{9j} ValDoc_j + \beta_{10j} NSE_j + \beta_{11j} RecEH_j \\ &\quad + \beta_{12j} Genero_j + r_{ij} \end{aligned}$$

Nivel 2, Establecimiento

$$\begin{aligned} \beta_{0j} &= \gamma_{00} + \gamma_{01} ExpDoc1_j + \gamma_{02} ExpDoc2_j + \gamma_{03} ExpDoc3_j + \gamma_{04} DepGSE1_j \\ &\quad + \gamma_{05} DepGSE2_j + \gamma_{06} DepGSE3_j + \gamma_{07} DepGSE4_j + \gamma_{08} DepGSE5_j + \gamma_{09} DepGSE6_j + \gamma_{010} DepGSE7_j \\ &\quad + \gamma_{011} DepGSE8_j + \gamma_{012} DepGSE9_j + \gamma_{013} DepGSE10_j + \gamma_{014} DepGSE11_j + \gamma_{015} Numeros_j \\ &\quad + \gamma_{016} Geometria_j + \gamma_{017} DatosAzar_j + \gamma_{018} Algebra_j + \gamma_{019} OrdAula_j + \gamma_{020} CondEstd_j + u_{0j} \end{aligned}$$

Con,

$\beta_{1j} = \gamma_{10}$ $\beta_{2j} = \gamma_{20}$ $\beta_{3j} = \gamma_{30}$ $\beta_{4j} = \gamma_{40}$ $\beta_{5j} = \gamma_{50}$ $\beta_{6j} = \gamma_{60}$ $\beta_{7j} = \gamma_{70}$ $\beta_{8j} = \gamma_{80}$ $\beta_{9j} = \gamma_{90}$ $\beta_{10j} = \gamma_{100}$

$\beta_{11j} = \gamma_{110}$ $\beta_{12j} = \gamma_{120}$

Donde,

$$
\begin{aligned}
SimceMat_{ij} &: \text{Puntaje en la prueba simce Matematica del alumno i en el establecimiento j} \\
\gamma_{00} &: \text{Representa el promedio poblacional de los puntajes} \\
r_{ij} &: \text{Componente aleatoria } \textbf{nivel 1} \\
u_{0j} &: \text{Componente aleatoria } \textbf{nivel 2}
\end{aligned}
$$

Supuestos del modelo multivel

Los modelos multinivel, como cualquier modelo de regresión, tienen algunos supuestos, los cuales recaen principalmente en el error del modelo, y su certificación se realiza a través del análisis de residuos.

- **Homocedasticidad del error**: el error tiene media nula y varianza constante

$$E(r_{ij}) = 0 \text{ y } Var(r_{ij}) = \sigma^2$$
$$E(u_{0j}) = 0 \text{ y } Var(u_{0j}) = \tau_{0j}$$

- **Independencia de los errores**: los componentes aleatorios y el valor predicho son ortogonales

$$\rho(r_{ij}, SimceMat_{ij} = 0) \text{ y } \rho(u_{0j}, SimceMat_{ij}) = 0$$

- **Normalidad de los errores**: los componentes aleatorios de ambos niveles tienen distribución Normal

$$r_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \text{ y } u_{0j} \sim N(0, \tau_{0j})$$

Resultados

El modelo HLM tiene un intercepto de 222 puntos, es decir, los alumnos de referencia, con los valores de las variables en cero, tienen ese puntaje en promedio. A nivel de alumnos, el valor cero de los índices lo obtienen quienes están en el nivel promedio nacional. Esto ocurre con los índices Recursos educativos, Nivel socioeconómico del estudiante, Autopercepción académica, Autovaloración en Matemática y Motivación en Matemática. En las variables dicotómicas, son las que presentan el valor de referencia: género femenino, no repitencia, expectativas de los padres cuarto medio o menos y asistencia igual o menor a 80 %.

El poder explicativo general del modelo es de un 53 %, donde la variabilidad entre establecimientos se pudo explicar en un 80 % y la variabilidad dentro de los establecimientos en un 26 %. Este nivel de ajuste es bastante alto. El último estudio de factores asociados con metodología HLM realizado por la Agencia de la Calidad de la Educación (Cerón y Lara, 2011)[16] logró explicar el 36 % a nivel general, un 24 % a nivel de estudiante y un 67 % a nivel de establecimiento.

Por otra parte, SERCE[17] aplica modelos HLM para describir los factores asociados al rendimiento de los alumnos de América Latina y el Caribe. Dentro de los modelos que aplicó para Chile en Matemática 3.° básico, el modelo multinivel explica 66,8 % a **nivel 2** y un 5,3 % a **nivel 1**. Para 6.° básico, estos valores fueron de 69,4 % a **nivel 2** y 2,12 % a **nivel 1** (LLECE, 2010).

En las Figuras 1 y 2 se presentan los resultados obtenidos del ajuste del modelo de factores asociados al aprendizaje en Educación Matemática para II medio. En ellas se puede observar la asociación de estos factores con el rendimiento de los estudiantes. La asociación de cada variable está aislada de las otras variables incluidas en el modelo. El valor de los coeficientes de dicha asociación, junto con su desviación estándar, puede ser consultado en el Cuadro 3, al final de la sección.

Tanto en el **nivel 1**, de estudiantes (Figura 1) como en el **nivel 2**, de establecimientos (Figura 2), los coeficientes tienen el signo esperado.

A nivel de estudiantes, una asistencia superior al 80 %, característica que presenta el 74 % de los alumnos de II medio, correlaciona con un puntaje mayor. El haber repetido de curso alguna vez lo que ha ocurrido con el 16 % de los alumnos, por el contrario, se asocia a un rendimiento menor. En términos de magnitud, la asociación del rendimiento con Asistencia es de 6 puntos y de 11 puntos negativos, en el caso de Repitencia.

Entre los índices construidos, a nivel de estudiantes, los que presentan mayor grado de asociación con los puntajes en Matemática de II medio son el de Autovaloración en Matemática y el de Autopercepción académica, $\rho > 0,4$. Estos índices se refieren a la percepción del alumno sobre su propio rendimiento en relación al resto de sus compañeros, si cree que hace correctamente los ejercicios de la asignatura, cómo evalúa su nivel de aprendizaje y cuáles son las expectativas que tiene para su educación en el futuro. Por cada incremento en una

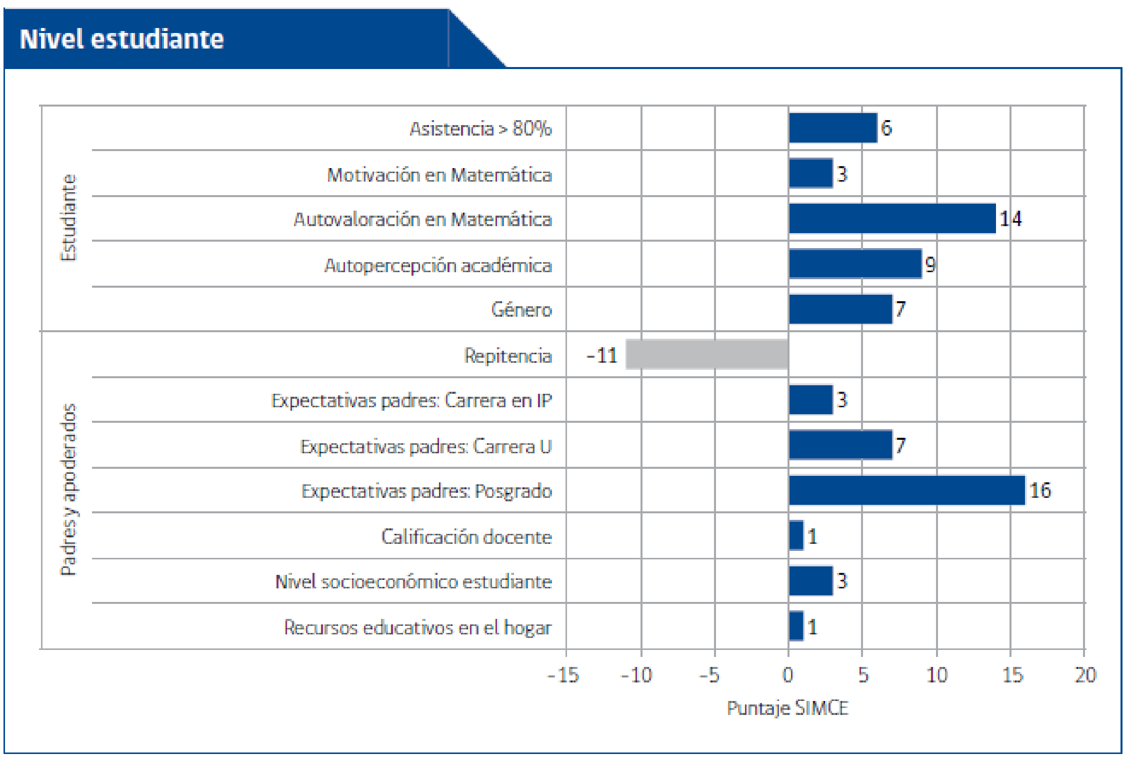
[16] Realizado con datos de estudiantes de 4.° básico aplicación SIMCE 2010.

[17] Aplicación definitiva entre junio y diciembre 2006.

desviación estándar del índice[18] de Autovaloración en Matemática, el puntaje en Matemática aumenta en 14 puntos. En el caso de Autopercepción académica, el incremento es de 9 puntos. Como se señalaba anteriormente, en esta asociación no se puede establecer cuál es la causa y cuál el efecto.

De las variables que provienen de la información recolectada de los padres, se puede apreciar que cuando estas son más altas, el puntaje en la prueba es mayor. Pero nuevamente, aunque las expectativas de los padres se asocian positivamente al rendimiento, esto no es, sin embargo, indicativo de causalidad.

Figura 1: Resultados modelo de factores asociados al aprendizaje en Matemática SIMCE II medio 2012: nivel estudiante

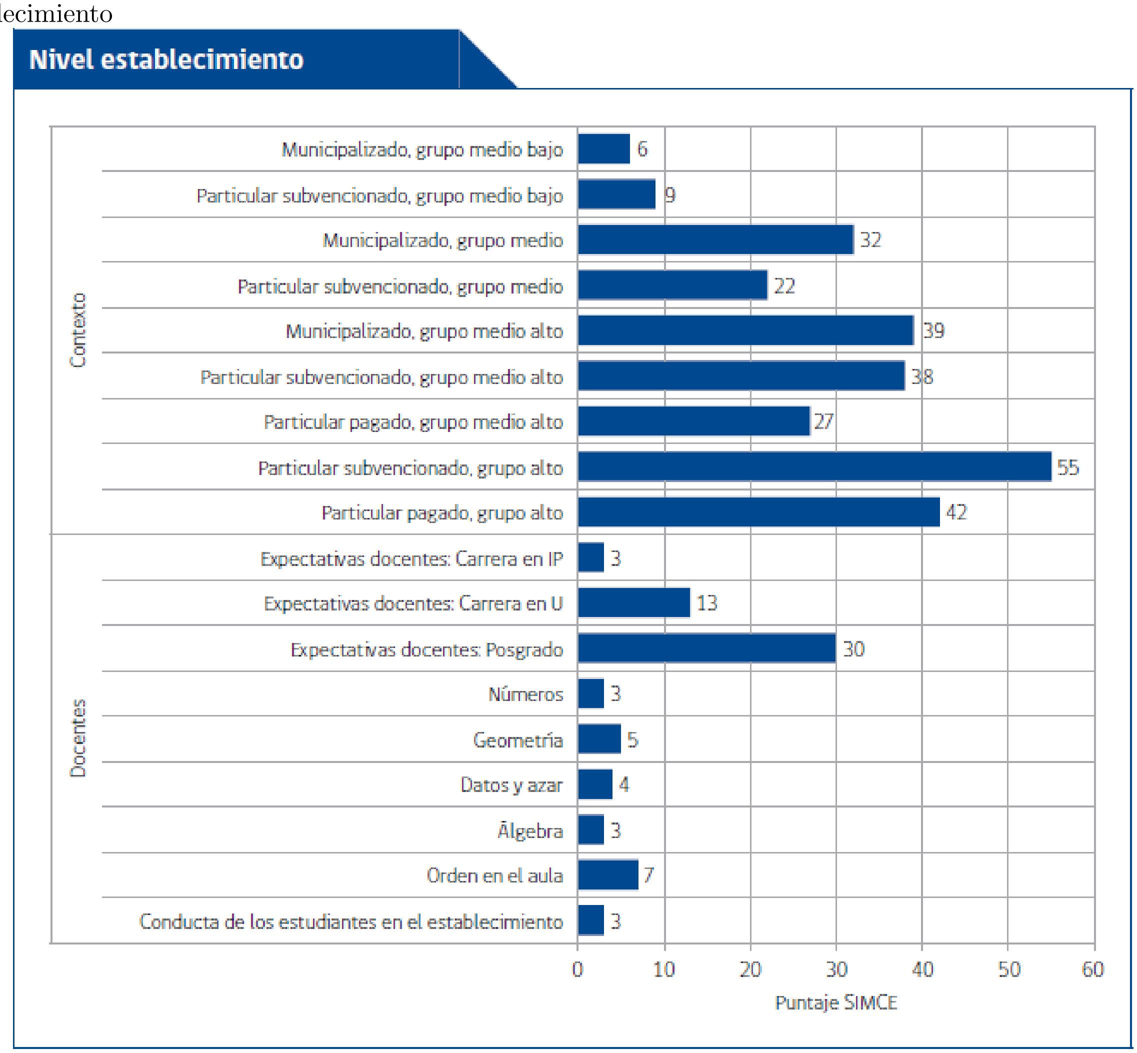


La buena calificación que los padres le dan al docente de Matemática también correlaciona positivamente con un mayor aprendizaje. Dentro de las variables contextuales se observa que las mujeres tendrían un resultado promedio esperado en la evaluación de Matemática, inferior en 7 puntos al de los hombres. Asimismo y tal como es lo esperado, se puede apreciar que mayores índices de Recursos educativos en el hogar y Nivel socioeconómico del estudiante están asociados a mayores resultados.

[18] Dado que la desviación estándar es cercana a la unidad.

En el **nivel 2**, de establecimientos, las principales asociaciones se dan con la variable Dependencia-GSE. En los GSE medio y medio alto, donde existen los tres tipos de dependencia, los establecimientos municipales destacan por su rendimiento superior a los particulares subvencionados. Estos últimos, a su vez, obtienen mejores resultados que los establecimientos particulares pagados.

Figura 2: Resultados modelo de factores asociados al aprendizaje en Matemática SIMCE II medio 2012: nivel establecimiento



Sin embargo, se observa que los resultados están dominados por el grupo socioeconómico, ya que la diferencia de resultados esperados entre esos grupos es mayor que dentro de ellos.

En los establecimientos particulares subvencionados de GSE alto, es donde se observan los puntajes más altos en SIMCE Matemática, más de diez puntos por sobre los particulares pagados de ese mismo GSE.

Si consideramos un valor alto de un índice como aquel que está media desviación estándar sobre el promedio y, como valor bajo, aquel que está media desviación estándar bajo el promedio, entonces entre los valores altos y bajos del índice hay una desviación estándar completa de diferencia. El coeficiente se puede interpretar el coeficiente como la diferencia entre los alumnos de alto y bajo índice.

Así, el valor esperado del promedio de resultados de los estudiantes cuyos docentes indican una percepción alta de los índices de Orden en Aula y Conducta de Estudiantes en Establecimiento es superior en diez puntos al valor esperado del promedio de los estudiantes cuyos docentes indican una percepción baja en dichos índices.

La cobertura curricular de los docentes en los cuatro ejes que contempla la prueba de Educación Matemática tienen relativamente la misma importancia, sin embargo, el efecto de Geometría es levemente mayor que en las restantes áreas. Un mayor desarrollo de los contenidos de los ejes curriculares podría influir en los resultados de aprendizaje, ya que el resultado promedio de los estudiantes cuyos docentes indican alto índice de desarrollo en todos los ejes es superior en cinco puntos al resultado promedio de los estudiantes cuyos docentes indican bajo índice de desarrollo. En las Expectativas docentes, al igual que la Expectativas de los padres, a medida que son más altas, el coeficiente es mucho mayor, es decir, si se mantiene todas las demás variables constantes, profesores con altas expectativas en sus alumnos se relaciona con estudiantes de buen rendimiento.

Las variables de expectativas, motivación y autoestima se retroalimentan entre sí. La literatura educacional ha mostrado evidencia de que los padres con mayores expectativas educacionales para sus hijos, llevan a que los propios niños y jóvenes presenten mayores conductas dirigidas al aprendizaje, deseen y se esfuercen por aprender más, obteniendo mejores rendimientos académicos (Fondo de las Naciones Unidas para la Infancia [UNICEF], 2005). A su vez, los estudiantes, al obtener mejores rendimientos académicos refuerzan aún más la imagen que tienen los propios padres de sus hijos, provocando que los padres valoren explícitamente sus esfuerzos y logros, reconociendo sus talentos especiales y haciéndolos sentir que son capaces, desarrollando en ellos una percepción positiva acerca de sus propias capacidades, un mayor interés por aprender y asistir a la escuela (Michigan Department of Education, 2001; Milicic, 2001).

Cuadro 3: Coeficientes del modelo HLM

Nivel	Variable	β	$\beta \times SD$	SD	p-value
Estudiante	Asistencia>80 %	5,6		0,2	0,000
	Motivación en matemáticas	3,1	2,9	0,2	0,000
	Autovaloración en matemáticas	13,7	12,9	0,2	0,000
	Autopercepción académica	9,3	8,6	0,1	0,000
	Repitencia	-11,0		0,3	0,000
	Expectativas padres: Carrera en IP	2,9		0,3	0,000
	Expectativas padres: Carrera en U	6,7		0,3	0,000
	Expectativas padres: Postgrado	16,3		0,4	0,000
	Calificación docente	1,0	1,2	0,1	0,000
	Nivel socioeconómico estudiante	2,9	2,7	0,2	0,000
	Recursos educativos en el hogar	1,2	1,0	0,1	0,000
	Género	6,8		0,2	0,000
Establecimiento	Expectativas docentes: Carrera en IP	3,4		1,3	0,000
	Expectativas docentes: Carrera en U	13,2		1,7	0,000
	Expectativas docentes: Postgrado	30,3		3,8	0,000
	Particular Subvencionado, grupo A	0,6		1,4	**0,674**
	Municipalizado, grupo B	6,3		1,7	0,000
	Particular Subvencionado, grupo B	9,1		1,5	0,000
	Municipalizado, grupo C	31,9		4,2	0,000
	Particular Subvencionado, grupo C	21,8		1,7	0,000
	Particular Pagado, grupo C	12,8		11,9	**0,282**
	Municipalizado, grupo D	38,7		16,4	0,000
	Particular Subvencionado, grupo D	37,6		2,1	0,000
	Particular Pagado, grupo D	26,8	4,9		0,000
	Particular Subvencionado, grupo E	54,8		5,3	0,000
	Particular Pagado, grupo E	42,3		2,5	0,000
	Números	2,9	2,1	0,6	0,000
	Geometría	5,0	3,6	0,6	0,000
	Datos y azar	3,9	2,8	0,6	0,000
	Algebra	3,0	2,1	0,6	0,000
	Orden en el aula	6,6	5,3	0,7	0,000
	Conducta de los estudiantes en el establecimiento	2,6	2,1	0,7	0,000

Nota: El p-value está definido como la probabilidad de obtener un resultado al menos tan extremo como el que realmente se ha obtenido. Significancia=0,05 para $H_0 : \beta = 0$

4.2. Verificación de supuestos del modelo

Los modelos multinivel, como todo modelo de regresión, tiene supuestos. De no cumplirse, las estimaciones obtenidas a través del mismo pudiesen no ser lo más precisas. Los principales supuestos recaen sobre el error de estimación (r_{ij} y u_{0j}) del modelo y su certificación se realiza a través del análisis de residuos. Los supuestos son los siguientes (Gelman & Hill, 2006):

1. **Homocedasticidad del error**

   Los errores r_{ij} y u_{0j} se distribuye con una media cero y varianza constante, para todas las unidades de nivel 1 y 2 respectivamente.

   En la siguiente tabla se exponen estadísticos descriptivos para los residuos de ambos niveles.

Cuadro 4: Estadísticos descriptivos residuos nivel 1 y 2

Residuo	N	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típica.
Nivel 1 r_{ij}	206241	-243,80	164,88	0,00	38,76
Nivel 2 u_{0j}	2770	-96,63	63,75	0,00	19,35

Los residuos generados a nivel de estudiante y establecimiento tienen media cero, como se puede ver en el Cuadro 4, es decir, que errores de igual magnitud y distinto signo son equiprobables, sin embargo, su variabilidad no es constante, lo cual se observa en las Figuras 3 y 4.

A nivel de estudiante, la variabilidad de los residuos es mayor en los valores medios de la distribución de puntajes estimados en Matemática. En los valores extremos la variabilidad resulta ser mucho más acotada.

A nivel de establecimiento en cambio, la viariabilidad de los residuos es homogénea para los valores predichos.

El no cumplimiento de este supuesto se relaciona con estimaciones ineficientes, de los coeficientes de las variables explicativas es decir, que no tienen varianza mínima, sin embargo, siguen siendo insesgadas.

Figura 3: Variabilidad de residuos nivel 1

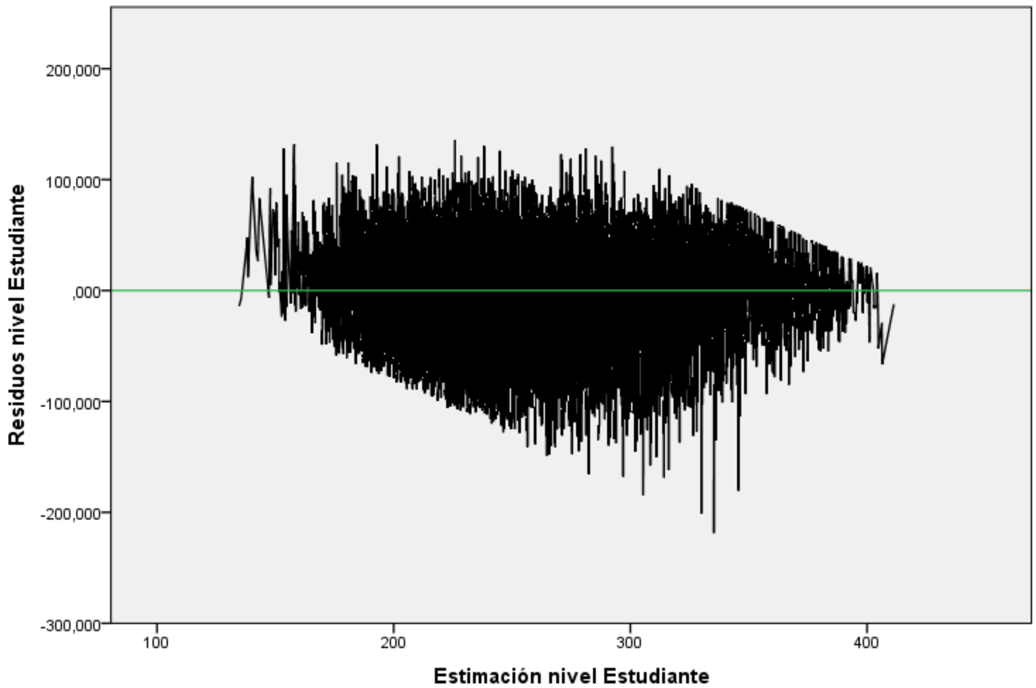
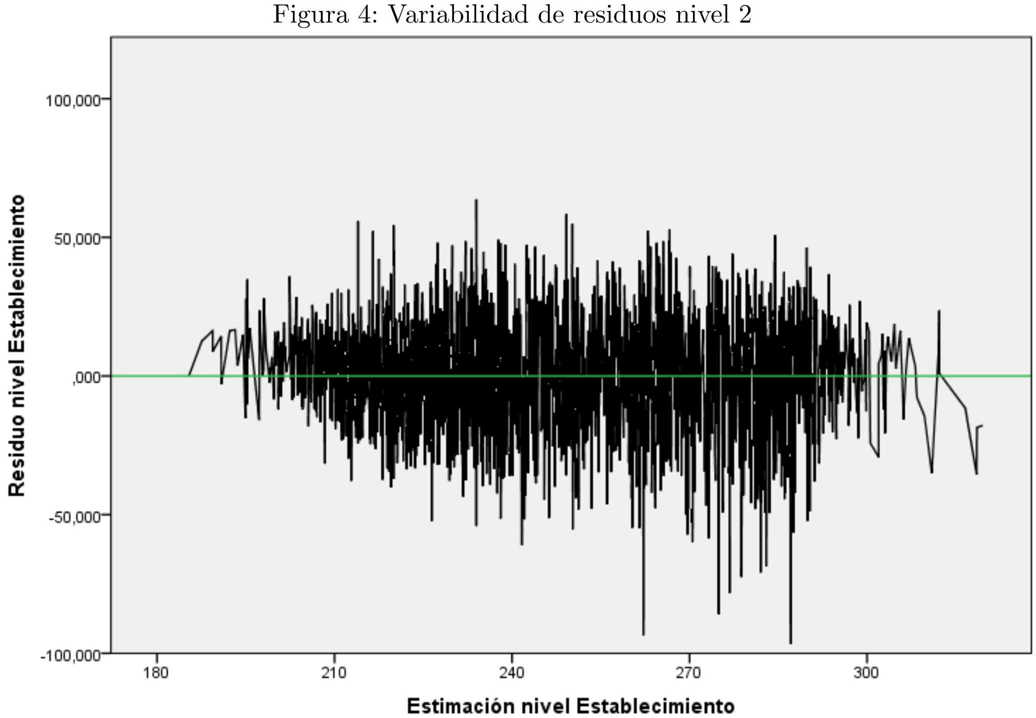


Figura 4: Variabilidad de residuos nivel 2



2. **Independencia**

   Los residuos deben ser independientes de las variables explicativas. Las variables explicativas de **nivel 1**, X_{kij}, son ortogonales a los errores r_{ij}, es decir, la $Cor(r_{ij}, X_{kij}) = 0$ para todo k. Así mismo, las variables explicativas de **nivel 2** X_{l0j} son ortogonales a los errores u_{0j} i.e., $Cor(u_{0j}, X_{l0j}) = 0$ para todo l.

   Se puede observar en las Figuras 5 y 6 la relación que existe entre los residuos y las variables explicativas continuas [19] para ambos niveles. Además la correlación es igual a cero, como se puede ver en los Cuadros 5 y 6.

   Figura 5: Asociación Residuos nivel 1 y variables explicativas de nivel 1

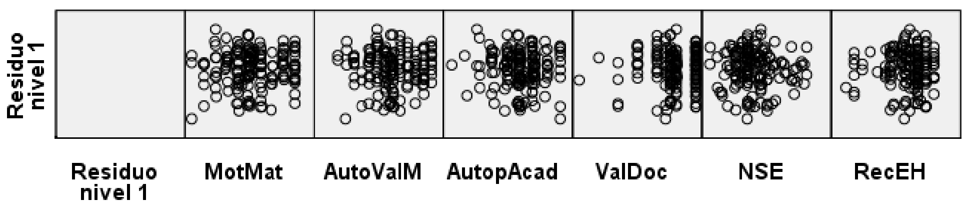
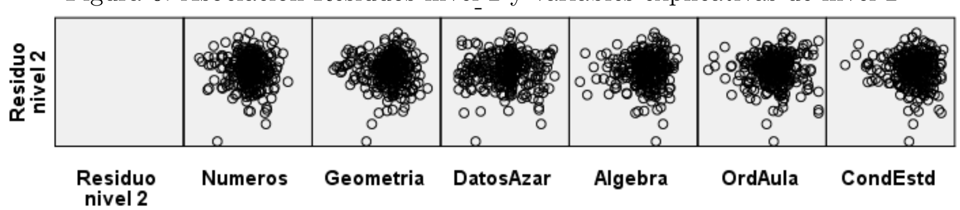
   

   Figura 6: Asociación Residuos nivel 2 y variables explicativas de nivel 2

   Se cumple el supuesto de independencia entre los residuos y las variables explicativas. Igualmente del punto anterior se desprende que los residuos no estan asociados a la variable respuesta.

[19] Los gráficos de dispersión para variables dicotómicas no son lo más apropiado para observar la asociación entre variables

Cuadro 5: Correlación de residuos nivel 1 y variables explicativas de nivel 1

Variables nivel 1	Correlación con r_{ij}	Variables nivel 1	Correlación con r_{ij}
Asistencia alta	0.000	Expectativas padres: Carrera en IP	0.000
Motivación en matemáticas	0.000	Expectativas padres: Carrera en U	0.000
Autovaloración en matemáticas	0.000	Expectativas padres: Postgrado	0.000
Autopercepción académica	0.000	Calificación docente	0.000
Género (Ref.: Femenino)	0.000	Nivel socioeconómico estudiante	0.000
Repitencia	0.000	Recursos educativos en el hogar	0.000

Cuadro 6: Correlación entre residuos nivel 2 y variables explicativas nivel 2

Variables nivel 2	Correlación con u_{0j}	Variables nivel 2	Correlación con u_{0j}
PSubvencionado, grupo A	0.000	Particular Pagado, grupo E	0.000
Municipalizado, grupo B	0.000	Expectativas docentes: Carrera en IP	0.000
PSubvencionado, grupo B	0.000	Expectativas docentes: Carrera en U	0.000
Municipalizado, grupo C	0.000	Expectativas docentes: Postgrado	0.000
PSubvencionado, grupo C	0.000	Números	0.000
PPagado, grupo C	0.000	Geometría	0.000
Municipalizado, grupo D	0.000	Datos y azar	0.000
PSubvencionado, grupo D	0.000	Algebra	0.000
PPagado, grupo D	0.000	Orden en el aula	0.000
PSubvencionado, grupo E	0.000	Conducta de los estudiantes	0.000

3. **Normalidad de los errores**

Los errores de estimación deben tener una distibución Normal con media 0 y varianza constante.

La distibución de los errores se muestra gráficamente en las Figuras 7 y 8. En el histograma de la Figura 7 se observa que la distribución se acerca bastante a la curva de distribución normal, sin embargo, no se ajustan para los valores bajo la media. En el Q-Q plot de la Figura 8 se observa también que para la cola izquierda de la distribución, el valor no corresponde al esperado para la distribucón normal.

Figura 7: Histograma de los residuos de nivel 1

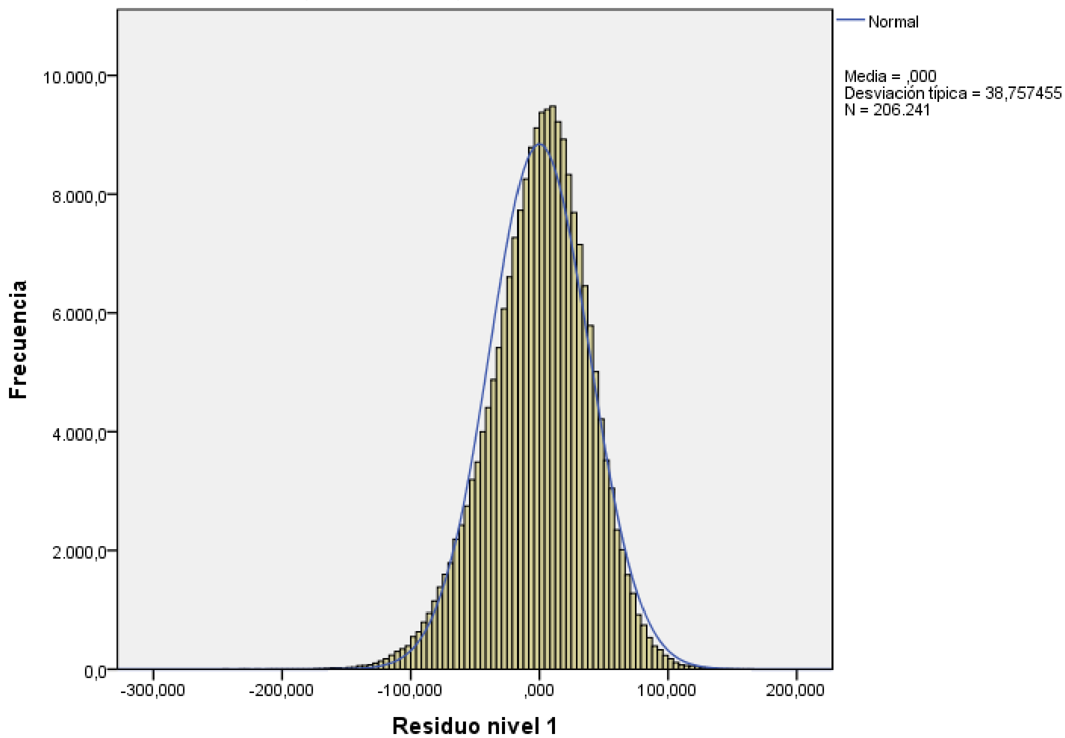
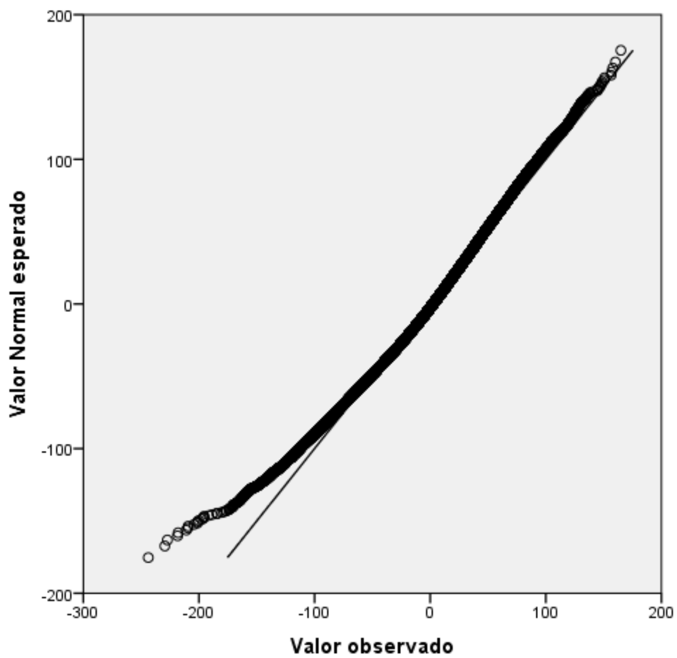


Figura 8: Gráfico Q-Q Normal de los residuos de nivel 1



Finalmente se concluye que los residuos a nivel de estudiante no presentan una distribución normal, lo cual lo respalda el test Kolmogorov-Smirnnov.

Figura 9: Test de Hipótesis Normalidad

Resumen de prueba de hipótesis

	Hipótesis nula	Test	Sig.	Decisión
1	La distribución de l1resid es normal con la media -0,00 y la desviación típica 38,76.	Prueba Kolmogorov-Smirnov de una muestra	,000	Rechazar la hipótesis nula.

Se muestran las significancias asintóticas. El nivel de significancia es ,05.

Este supuesto se puede relajar, pues se emplean los errores de estimación robustos. Por otra parte corresponde a un supuesto importante cuando se busca inferir resultados a la población. Para el caso de los resultados Simce, sin embargo, la prueba de Matemática en II medio es censal, por lo que ya considera a toda la población.

4.3. Ajuste y calidad del Modelo

El último paso es evaluar la calidad del modelo, lo que se mide principalmente por cuanta varianza de los resultados en Matemática **dentro** de los establecimientos –nivel estudiante– y **entre** los establecimientos es explicada por el modelo multinivel escogido. Además se debe estudiar la confiabilidad estimada.

Para cuantificar lo anterior se comienza con el modelo inicial, sin variables explicativas, que es llamado Modelo Nulo o Incondicional:

- **Nivel 1, Estudiante**

$$SimceMat_{ij} = \beta_{0j} + r_{ij} \tag{28}$$

- **Nivel 2, Establecimiento**

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j} \tag{29}$$

- **Modelo Mixto**

$$SimceMat_{ij} = \underbrace{\gamma_{00}}_{\text{Efecto común para todos}} + \underbrace{u_{0j}}_{\text{Efecto grupo}} + \underbrace{r_{ij}}_{\text{Efecto aleatorio}} \tag{30}$$

El modelo Nulo o Incondicional ajusta los resultados de los estudiantes en la prueba de Matemática sin la inclusión de variables explicativas, tomando en cuenta solo el efecto común para todos los estudiantes, el efecto de grupos y el efecto aleatorio.

La variabilidad total se expresa de la siguiente forma:

$$Var(SimceMat_{ij}) = \sigma^2 + \tau_{00} \tag{31}$$

Donde,

σ^2: Varianza dentro de los grupos

τ_{00}:Varianza entre los grupos

Al plantear este modelo es posible identificar la variabilidad total que existe entre establecimientos y dentro de los establecimientos. Así entonces se utilizan estos parametros para medir la **reducción de la varianza** al incorporar variables explicativas adecuadas en el modelo.

Para evaluar el modelo, interesa que logre explicar la mayor parte de la variabilidad de los datos, a nivel de estudiante y de establecimiento. Lo anterior se mide através de la proporción de varianza explicada, o bien, la reducción de la varianza del modelo escogido respecto del modelo Nulo o Incondicional.

- **Nivel 1**

$$\text{Proporción de varianza explicada} = \frac{\sigma^2(\text{Nulo}) - \sigma^2(\text{Modelo Final})}{\sigma^2(\text{Nulo})} \tag{32}$$

- **Nivel 2**

$$\text{Proporción de varianza explicada} = \frac{\tau_{00}(\text{Nulo}) - \tau_{00}(\text{Modelo Final})}{\tau_{00}(\text{Nulo})} \tag{33}$$

En los Cuadros 7, 8 y 9 muestran respectivamente, los componentes de la varianza para el modelo nulo, para el modelo final escogido, y la proporción de la varianza explicada para ambos niveles.

Cuadro 7: Componentes de la Varianza Modelo Nulo

Efecto	Desviación Estándar	Componente de la varianza	p-value
Establecimiento, u_0	45,35	2.057,04	0,000
Alumno, r	44,84	2.011,37	
Total		4.068,41	

Cuadro 8: Componentes de la Varianza Modelo Final

Efecto	Desviación Estándar	Componente de la varianza	p-value
Establecimiento, u_0	20,26	410,75	0,000
Alumno, r	38,99	1.520,99	
Total		1.931,74	

Cuadro 9: Reducción de los Componentes de la Varianza

Nivel	Modelo Nulo	Modelo Final	Proporción de la varianza explicada
Nivel Estudiante	2.057,04	1.520,99	26,10 %
Nivel Establecimiento	2.011,37	410,75	79,60 %
Varianza Total	4.068,41	1.931,74	52,50 %

A nivel de estudiantes, el modelo final reduce en un 26,1 % la varianza, es decir, logra explicar esa proporción mediante las variables incorporadas en el modelo. Por otra parte, a nivel de establecimiento, la proporción explicada es más alta, de un 79,6 %. A nivel general, la varianza explicada alcanza el 52,5 % de la variabilidad total de los datos. Podemos notar que el porcentaje de variabilidad explicada es mucho mayor a nivel de establecimiento que a nivel de estudiante. Intuitivamente se puede atribuir este fenómeno a las características que tiene el sistema educacional chileno, donde existe gran asociación del rendimiento con las características de los establecimientos.

La **correlación intraclase** indica cómo se relacionan dos resultados dentro del mismo establecimiento (Raudenbush et al., 2011). Esta es la proporción de la varianza total debida a la estructura de los datos, donde existe un nivel estudiante y un nivel establecimiento.

$$\rho = \frac{\tau_{00}}{\tau_{00} + \sigma^2} \tag{34}$$

En el Cuadro 10 se muestra la correlación intraclase para el modelo nulo y el modelo final, donde se puede observar que disminuye bastante, por lo que el modelo logra explicar la asociación existente entre los resultados de los alumnos de un mismo establecimiento, reduciendo la correlación intraclase de 0,5056 a 0,2126. Sin embargo, todavía existe un grado de asociación, el cual no es modelado por las variables incluidas en el modelo final.

Cuadro 10: Estimadores ajuste y calidad

Estadístico	Modelo Nulo	Modelo Final
Correlación Intraclase ρ	0,5056	0,2126
Confiabilidad λ	0,976	0,918

La **confiabilidad estimada**, es la confiabilidad global de los puntajes observados en Matemática como estimadores de los puntajes verdaderos (β_{0j}), e indica el grado de certeza de tomar el puntaje promedio observado del establecimiento como el puntaje verdadero del mismo. Esta es calculada por el promedio de las confiabilidades, es decir el promedio entre las razones de la varianza del puntaje verdadero del grupo y la varianza del puntaje observado del grupo.

$$\lambda_j = \frac{\tau_{00}}{\tau_{00} + \frac{\sigma^2}{n_j}} \tag{35}$$

$$\lambda = \sum_{j=1}^{N_j} \frac{\lambda_j}{N_j} \tag{36}$$

Donde,

N_j:Total de establecimientos (2.770)

n_j: Tamaño del establecimiento j (cantidad de alumnos dentro del establecimiento j)

La confiabilidad global del modelo final es alta, 0,918. Esto indica que los promedios observados a nivel de establecimiento tienden a ser bastante confiables respecto del puntaje verdadero de estos.

5. Comentarios Finales

Los modelos lineales jerárquicos identifican las asociaciones con rendimiento a nivel estudiante y establecimiento de manera que se considere la dependencia que existe entre ambos niveles. Esto permite un análisis detallado y estadísticamente preciso de los factores asociados al rendimiento académico.

Respecto a los resultados expuestos en este documento, cabe destacar los siguientes:
A nivel individual, la **Autovaloración en Matemáticas** y la **Autopercepción académica** positiva son características que se asocian positivamente a los resultados en el aprendizaje de Matemática. El promedio esperado para estudiantes con valores altos de dichos índices supera en alrededor de 20 puntos al resultado promedio en Matemáticas de los estudiantes con valores bajos en los índices que reportan sobre estas características.

La **Asistencia** a clases y la **Valoración que los padres y apoderados** le dan al docente de Matemáticas, también correlacionan positivamente con los resultados en las pruebas de esta área, mientras que la **Repitencia** está asociada a resultados incluso 11 puntos más bajos.

El poder explicativo general del modelo es de un 53 %, donde la variabilidad entre establecimientos se pudo explicar en un 80 % y la variabilidad dentro de los establecimientos en un 26 %. Este nivel de ajuste es bastante alto, sobre todo si es que se considera el último estudio de factores asociados con metodología HLM[20] realizado por la Agencia de la Calidad de la Educación (Cerón y Lara, 2011). Este logró explicar el 36 % a nivel general, un 67 % a nivel de establecimiento y un 24 % a nivel de estudiante. Por otra parte, estudios internacionales dedicados al tema, como SERCE[21], que aplica modelos HLM para describir los factores asociados al rendimiento de los alumnos de América Latina y el Caribe, dentro de los múltiples modelos que aplicó para Chile, con el modelo multinivel explicó, en Matemática 3.° un 66,8 % a **nivel 2** y un 5,3 % a **nivel 1** y para 6.° un 69,4 % a **nivel 2** y un 2,12 % a **nivel 1** (LLECE, 2010).

A nivel de establecimiento, se observa que el valor esperado del promedio de resultados de los estudiantes cuyos docentes indican una percepción alta de los índices de **Orden en el aula** y **Conducta de estudiantes en establecimiento** es superior en diez puntos al valor esperado del promedio de los estudiantes cuyos docentes indican una percepción baja en dichos índices. Asimismo, un mayor desarrollo de los contenidos de los ejes curriculares podría influir en los resultados de aprendizaje, ya que el resultado promedio de los estudiantes cuyos docentes indican alto índice de desarrollo en dichos ejes es superior en cinco puntos al resultado promedio de los

[20] Realizado con datos de estudiantes de 4.° básico, aplicación Simce 2010.
[21] Aplicación definitiva entre junio y diciembre 2006.

estudiantes cuyos docentes indican bajo índice de desarrollo. Altas **Expectativas de los docentes** también se asocia a un resultado esperado superior en más de 10 puntos.

La información que se ha utilizado ha ayudado a contextualizar los resultados de aprendizaje obtenidos por los estudiantes. Se logra identificar qué variables tienen una mayor asociación positiva o negativa con en el logro académico. Se recomienda estudiar estos factores en profundidad, para entender el mecanismo de trasmisión y cuantificar su efecto verdadero, permitiendo así el diseño de políticas públicas efectivas.

Bibliografía

[1] Agencia de Calidad de la Educación. (2012a). *Archivos SIMCE 2012 II medio a nivel de alumno.* [Archivo de datos] Santiago: autor.

[2] Agencia de Calidad de la Educación. (2012b). *Cuestionarios de Contexto Aplicación SIMCE 2012 II medio.* [Archivo de datos] Santiago: autor.

[3] Agencia de Calidad de la Educación. (2012c). *Resultados TIMSS 2011 Chile. Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias.* Chile: autor.

[4] Agencia de Calidad de la Educación. (2012). *Informe Nacional de Resultados SIMCE 2012.* Santiago: autor.

[5] Agencia de Calidad de la Educación. (2012). *Metodología de Construcción de Grupos Socioeconómicos SIMCE 2012.* Santiago: autor. Disponible en http://www.agenciaeducacion.cl/wp-content/uploads/2013/02/Metodologia-de-Construccion-de-Grupos-Socioeconomicos-SIMCE-2012.pdf

[6] Álvarez, R. (1995). *Estadística Multivariante y no Paramétrica con SPSS.* Madrid: Ediciones Díaz de Santos S.A.

[7] Arancibia, V. (1992). *Efectividad escolar, un análisis comparado.* Estudios Públicos, n.° 47. 101-125.

[8] Bellei, C.; Perez, L.M.; Muñoz, G. y Raczynski, D. (2004). *¿Quién dijo que no se puede? Escuelas Efectivas en Sectores de Pobreza.* UNICEF. Santiago de Chile.

[9] Bryk, A.S. y Raudenbush, S.W. (1992). *Hierarchical Linear Models: Applications and Data Analysis Methods.* Newbury Park, CA: Sage.

[10] Cabezas, V. (2010). *Gender peer effects in school: Does the gender of school peers affect student's achievement?* Trabajo presentado en el "Primer Encuentro Anual de la Sociedad Chilena de Políticas Públicas", Santiago de Chile. Obtenido de: http://www.sociedadpoliticaspublicas.cl/archivos/MODULO_II/Panel05_Educacion/Veronica_Cabezas_Gender_peer-effects_in_school.pdf

[11] Cerón, F. y Lara, M. (2011). *Factores asociados con el rendimiento escolar SIMCE 2010, Educación Matemática 4.° Básico e Inglés 3.° Medio.* Agencia de la Calidad de la Educación, Documento de Trabajo n.° 2.

[12] ChiewGoh, S.; Young, D.J. y Fraser, B.J. (1995).*Psychosocial Climate and Student Outcomes in Elementary Mathematics Classrooms: A Multilevel Analysis.*The Journal of Experimental Education. Volume 64, Issue 1. 29-40.

[13] Coleman, J.S.; Campbell, E.Q.; Hobson, C.F.; Mood, J.; Weifield, F.D. y York, R.L. (1966). *Equality of Educational Opportunity.* Washington, DC: U.S. Department of Health, Education y Welfare.

[14] Cotton, K. (1995). *Effective schooling practices: a research synthesis.* School Improvement Research Series. Northwest Regional Educational Laboratory.

[15] Creemers, B. (1994). *The Effective Classroom.* London: Cassell.

[16] De la Fuente, S. (2011). *Análisis Factorial.* Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad Autónoma de Madrid.

[17] Dearing, E.; Kreider, H. y Weiss, H.B. (2008). *Increased family involvement in school predicts improved child-teacher relationships and feelings about school for low-income children.* Marriage and Family Review, Vol. 43. 226-254.

[18] Devine, J. y Cohen, J. (2007). *Making your school safe: Strategies to protect children and promote learning.* New York: Teachers College Press.

[19] Durlak, J.; Weissberg, R.; Schellinger, K.; Dymnicki, A. y Taylor, R. (2011). *The Impact of Enhancing Students' Social and Emotional Learning: A Meta-Analysis of School-Based Universal Interventions.* Child Development, January/February 2011, Volume 82, Number 1, 405–432.

[20] Edel, R. (2003). *El rendimiento académico, concepto, investigación y desarrollo.* Revista Electrónica Iberoamericana sobre calidad, eficacia y cambio en educación, N° 1, Artículo 7.

[21] Epstein, J. y Sheldon, S. (2002). *Present and accounted for: Improving student attendance through family and community involvement.* Journal of Educational Research, 95(5), 308-318.

[22] Esnaola, I. (2008). *El autoconcepto: perspectivas de investigación.* Revista de Psicodidáctica, 13 (1), 179-194.

[23] Fleming, C.B.; Haggerty, K.P.; Catalano, R.F.; Harachi, T.W.; Mazza, J.J., y Gruman, D.H. (2005). *Do social and behavioral characteristics targeted by preventive interventions predict standardized test scores and grades?* Journal of School Health, Vol. 75, 342–349.

[24] Gelman. A. y, Hill., J. (2006). *Data analysis using regression and multilevel/hierarchical models.* Analyticalmethodsfor social research. Cambridge.

[25] Goldstein, H. (2003). *Multilevel Statistical Models.* London: Edward Arnold.

[26] Gómez-Neto, J.B. y Hanushek, E. (1992). *Educational Perfomance of the Poor.* Publicado por el Banco Mundial. Oxford University Press. New York.

[27] González-Pienda, J.; Núñez, J.; González-Pumariega, S.; Álvarez, L.; Roces, C.; García, M.; González, P.; Cabanach, R. y Valle, A. (1997) *Autoconcepto, proceso de atribución causal y metas académicas en niños con y sin dificultades de aprendizaje.* Psicothema. Vol. 12, n.° 4, 548-556.

[28] Gottfried, M. (2010). *Evaluating the Relationship between Student Attendance and Achievement in Urban Elementary and Middle Schools: An Instrumental Variables Approach.* American Educational Research Journal, 47(2), 434-465.

[29] Gubbins, F.; Dois, A. y Alfaro, M. (2006) *Factores que influyen en el buen rendimiento escolar de niños y niñas que viven en condiciones familiares de pobreza.* Recuperado el 23 de abril de 2012, de http://psicologia.uahurtado.cl/vgubbins/wp-content/uploads/2008/04/factores-asociados-a-rendimiento-escolar.pdf

[30] Heynemann, S. y Loxley, W. (1983). *The Effect of Primary School Quality on Academic Achievement Across Twenty-nine High and Low Income Countries.* The American Journal of Sociology, 88 (6), 1162-1194.

[31] Hox, J.J. (1995). *Applied Multilevel Analysis.* Amsterdam: TT-Publikaties.

[32] Hox, J.J. (1998). *Multilevel modeling: when and why.* En Balderjahn, I. y Schader, M. (Eds.), *Classification, data analysis and data highways* (147-154). New York: Springer Verlag.

[33] Hoxby, C. (2001). *If Families Matter Most, Where Do Schools Come In?* En Moe, T. (Ed.) *A Primer on America Schools.* Stanford, CA: Hoover Institution Press.

[34] IEA. (2008). *International Civic and Citizenship Education Study.* Assessment Framework.

[35] Jencks, C. (1972). *Inequality: A Reassessment of the Effect of Family and Schooling in America.* New York: Basic Books.

[36] LLECE (2010). *Factores asociados al logro cognitivo de los estudiantes de América Latina y el Caribe.* Segundo estudio regional comparativo y explicativo. OREALC/UNESCO Santiago.

[37] Luyten, H. (1994). *School effects: Stability and malleability.* Enschede: University of Twente.

[38] Marks, G.; Cresswell, J. y Ainley, J. (2006). *Explaining Socioeconomic Inequalities in Student Achievement: The role of home and school factors.* Educational Research and Evaluation, Vol 12, N.°2, .105-128.

[39] Martin, M.O.; Mullis, I.V.S.; Foy, P. y Stanco, G.M. (2012). *TIMSS 2011 international results in science.* Chestnut Hill, MA: TIMSS y PIRLS International Study Center, Boston College.

[40] Marzano, R.J. (2000). *A New Era of School Reform: Going Where the Research Takes Us.* Aurora, CO: Mid-continent Research for Education and Learning.

[41] McEwan, P., y Shapiro, J. (2007). *The Benefits of Delayed Primary School Enrollment: Discontinuity Estimates using exact Birth Dates.* [Unpublished Manuscript].

[42] Michigan Department of Education. (2001). *What research says about parent involvement in childrens education in relation to academic achievement.* En http://www.michigan.gov/mde.

[43] Milicic, N. (2001). *Creo en ti. La construcción de la autoestima en el contexto escolar.* Santiago: LOM Ediciones.

[44] MINEDUC, Unidad de Currículum y Evaluación (2011). *Resultados nacionales SIMCE 2010.* Santiago, Chile.

[45] Mizala, A.; Romaguera, P. y Reinaga, T. (1999). *Factores que inciden en el rendimiento escolar en Bolivia.* Documento de Trabajo N.° 61, Centro de Economía Aplicada, Depto. de Ingeniería Industrial, U. de Chile.

[46] Muijs, D., y Reynolds, D. (2005) *Effective Teaching. Evidence and Practice.* SAGE publications. Second edition. London y Thousand Oaks CA.

[47] Mullis, I.V.S.; Martin, M. O.; Foy, P. y Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics.* Chestnut Hill, MA: TIMSS y PIRLS International Study Center, Boston College.

[48] Muñiz, A.; Ferreiro, M.; y Buceta M. (2009). *Influencia de la baja motivación y la baja autoestima en el rendimiento académico.* Actas do X Congresso Internacional Galego-Portugues de Psicopedagogía. Braga: Universidade do Minho.

[49] Musser, M. (2011).*Taking Attendance Seriously: How School Absences Undermine Student and School Performance in New York City.* Nueva York: Campaign for Fiscal Equity.

[50] OECD (2010). *PISA 2009 Results: Learning to Learn.* Student Engagement, Strategies and Practices (Volume III).

[51] OFSTED (2006). *Parents' satisfaction with schools.* UK. HMI 2634.

[52] Palardy, G.J. y Rumberger, R.W. (2008). *Teacher effectiveness in the first grade: The importance of background qualifications, attitudes, and instructional practices for student learning.* Educational Evaluation and Policy Analysis, 30, 111-140.

[53] Paredes, R.; Ugarte, G.; Volante, P. y Fuller, D. (2009). *Camino al Bicentenario, Propuestas para Chile.* Capítulo III: Asistencia, desempeño escolar y política de financiamiento. Centro de Políticas Públicas PUC.

[54] Pedró, F. (2006). *Un diagnóstico de la situación del profesorado en España desde una perspectiva comparativa.* Revista de Educación, 340, mayo-agosto 2006.

[55] Peirano, C.; Kluttig, M. y Vergara, C. (2009). *Evidencia sobre Uso de Tecnología y su Correlación con Desempeño en PISA 2006.* Ministerio de Educación, Santiago, Chile.

[56] Peña, D. (2002). *Análisis de datos multivariantes.* Madrid: McGraw Hill.

[57] Phillipson, S., y Phillipson, S.N. (2007). *Academic expectations, belief of ability, and involvement by parents as predictors of child achievement: A cross-cultural comparison.* Educational Psychology [P], vol 27, issue 3, Routledge, United Kingdom. 329-348.

[58] Rabe-Hesketh, S. y Skrondal, A. (2012). *Multilevel and Longitudinal Modeling Using Stata.* Volume I: Continuous Responses, 3era edición. Stata Press.

[59] Raudenbush, S.; Bryk, A. y Cheong, Y. (2011). *HLM7 Hierachical Linear y Nonlinear Modeling.* SSI Scientific Software International.

[60] Rojas, L.A. (2005). *Grado de influencia que tiene el auto-concepto profesional del docente y las expectativas sobre sus alumnos, en el rendimiento académico.* Tesis para optar al grado de Magíster en Educación, con mención en Currículo y Comunidad Educativa. Departamento de Educación, Facultad de Ciencias Sociales, Universidad de Chile.

[61] Roscigno, V. y Ainsworth-Darnell, J.W. (1999). *Race, Cultural Capital, and Educational Resources: Persistent Inequalities and Achievement Returns.* Sociology of Education, vol. 72(3): 158-178.

[62] Rowe, K.J. y Hill, P.W. (1994) *Multilevel modeling in school effectiveness research: How many levels.* Paper presented at the International Congress of School Effectiveness and Improvement, Melbourne, Australia.

[63] Rytkonen, K.; Aunola, K. y Nurmi, J.E. (2005). *Parents causal attributions concerning their childrens school achievement: A longitudinal study.* Merrill-Palmer Quarterly, 51, 494-522.

[64] Schultz, G.; Ursprung, H. y Woessmann, L. (2008). *Education Policy and Equality of Opportunity.* Kyklos 61: 279-308.

[65] Sheerens J. y Bosker, R.J. (1997). *The foundations of educational effectiveness.* Oxford: Elsevier Science Ltd.

[66] SIGE (2012). Asistencia II medio a nivel de alumno. [Archivo de datos] Santiago.

[67] Stewart, E.B. (2008). *School structural characteristics, student effort, peer associations, and parental involvement: The influence of school- and individual-level factors on academic achievement.* Education y Urban Society, 40(2), 179-204.

[68] Stringfield, S. y Teddlie, C. (1989). *The three first phases of the Louisiana school effectiveness study.* En Vreemers, B.P.M.; Peters, T. and y Reynolds, D. (eds.) *School effectiveness and school improvement: Proceedings of the Second International Congress, Rotterdam.* Lisse: SwetsyZeitlinger.

[69] Tubbs, E.J. y Garner, M. (2008). *The Impact of School Climate on School Outcomes.* Kennesaw State University, Georgia: Journal of College Teaching and Learning, Vol. 5, N. 9.

[70] UNESCO-OREALC. (2010). *Factores asociados al logro cognitivo de los estudiantes en América Latina y el Caribe.* Santiago, Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe de la UNESCO, Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación

[71] Vyas, S. y Kumaranayake, L. (2006). *Constructing socio-economic status indices: how to use principal components analysis.* Oxford Journals. Vol 21. Issue 6 p 459-468.

[72] Wang, J.; Xie, H., y Fisher, J. (2011). *Multilevel Models: Applications using SAS.* De Gruyter.

6. Anexo

6.1. Análisis Factorial

El análisis factorial es una técnica estadística de análisis de datos multivariantes que, bajo determinadas condiciones, y con ciertas limitaciones, permite estimar los factores que dan cuenta de un conjunto de variables. Dado que es frecuente que las medidas psicológicas presenten correlaciones entre sí, es posible reducir el número de variables –ítems– a un número menor de factores y encontrar así índices que engloben la información.

Este método surge impulsado por el interés de Karl Pearson y Charles Spearman de comprender las dimensiones de la inteligencia humana en los años 30, y muchos de sus avances se han producido en el área de la Psicometría (Peña, 2000).

6.1.1. Consideraciones previas

Inicialmente es útil aplicar las siguientes pruebas para determinar si el análisis factorial es viable:

- Prueba Kaiser-Meyer-Olkin (Índice KMO)

  Este índice permite comparar las magnitudes de los coeficientes de correlación observados con las magnitudes de los coeficientes de correlación parcial.

  El índice KMO se calcula según la siguiente expresión:

$$KMO = \frac{\sum\sum_{i\neq j} r_{ij}^2}{\sum\sum_{i\neq j} r_{ij}^2 + \sum\sum_{i\neq j} s_{ij}^2} \tag{37}$$

  Donde,
  r_{ij}^2:Coeficiente de correlación observada entre las variables i y j.
  s_{ij}^2:Coeficiente de correlación parcial entre las variables i y j.

  El coeficiente de correlación parcial entre las variables i y j, manteniendo k constante, está determinado por la siguiente expresión:

$$s_{ij.k}^2 = \frac{r_{ij} - r_{ik}r_{jk}}{\sqrt{1-r_{ik}^2}\sqrt{1-r_{jk}^2}} \tag{38}$$

  La situación ideal es que el coeficiente de correlación parcial (s_{ij}^2) no perturbe los coeficientes lineales, de modo que un índice KMO próximo a 1 es óptimo (Álvarez, 1995). Además son comúnmente aceptadas las reglas de decisión que aparecen en el Cuadro 11.

Cuadro 11: Criterio índice KMO

Índice KMO	**Indicación**
KMO>0,7	Indica alta correlación entre las variables, y por lo tanto, conveniente realizar un análisis factorial.
0,5>KMO>0,6	Indica un grado de correlación medio y el AF sería menos útil que en el caso anterior.
KMO<0,5	Indica que un AF no resultaría una técnica útil.

- Prueba de esfericidad de Bartlett

En la prueba de esfericidad de Bartlett, se contrasta la hipótesis nula de que la matriz de correlaciones R es una matriz identidad, es decir, que las variables no están correlacionadas, versus la hipótesis alternativa que indica que la matriz R es diferente a la matriz identidad, debido a que hay correlación entre las variables.

La prueba de hipótesis se puede representar de la siguiente manera:

$H_0 : |R| = 1$ No hay correlación entre las variables

$H_0 : |R| \neq 1$ Hay correlación entre las variables

El estadístico de Bartlett se obtiene a partir de una transformación X^2 del determinante de la matriz de correlaciones, y cuanto mayor es el valor obtenido, menor será el nivel de significancia, lo cual indicará que **existe una menor probabilidad que la matriz sea igual a una matriz identidad**, por lo tanto resultará más adecuado el uso del análisis factorial.

El estadístico de prueba que se utiliza es:

$$X^2 = -[p - 1 - \frac{1}{6}(2n + 5)] \ln |R| \tag{39}$$

Dónde:

p: tamaño muestral.

n: número de variables.

R: matriz de correlaciones.

Se rechaza H_0 si:

$$X^2 > \frac{X^2_{n(n-1)}}{2} \tag{40}$$

6.2. Modelo factorial

Una vez realizadas las pruebas previas, y si el resultado es que el modelo factorial es viable, se lleva a cabo la técnica de análisis estadístico multivariado con extracción de factores mediante componentes principales. Para estudiar las relaciones que se presentan entre p variables correlacionadas, se transforma el conjunto original de variables en otro conjunto de nuevas variables llamadas **componentes principales**. Estas son combinaciones lineales no correlacionadas de las originales, las que se van construyendo según el orden de importancia con respecto a la variabilidad total que recogen de los datos.

Para que la reducción de la dimensión sea efectiva, lo ideal es que p sea muy menor a n. Usualmente en el análisis factorial a las variables F se les denomina **factores comunes** y a las variables U, **factores únicos**.

Estos factores, en general, no son conocidos a priori, por lo que esta metodología es una técnica exploratoria de la estructura de los datos. También se puede utilizar como una técnica confirmatoria si se tiene una hipótesis previa sobre la estructura de los mismos. Por otro lado, los factores son variables no observables y deben aglutinar información redundante de un contenido. Además, para que la técnica tenga éxito y la reducción de la dimensión sea significativa las variables deben tener ciertos niveles de correlación.

Los pasos a seguir en un análisis factorial son los siguientes:

1. Estudiar la matriz de correlaciones.
2. Extracción de factores.
3. Rotación de los factores para facilitar la interpretación.

Por lo tanto, un análisis factorial consiste en el estudio de la matriz de correlaciones (covarianzas) de forma que:

- La mayor parte de la correlación (covarianza) entre las variables es explicada por los factores comunes. Además, la matriz tiene una cierta estructura y puede dividirse en dos partes, la parte generada por los factores comunes y la parte generada por los errores o factores únicos.
- Cualquier porción de varianza no explicada se asigna a una variable de error (factor único).

Modelo matemático El análisis factorial lo define el siguiente modelo matemático, en el cual se expresan las variables originales $(X_1 \ldots X_n)$ como combinaciones lineales de una nueva variable $(F_1 \ldots F_p)$ de la forma:

$$\begin{aligned}
x_1 - \mu_1 &= a_{11}F_1 + a_{12}F_2 + \ldots + a_{1p}F_p + U_1 \\
x_2 - \mu_2 &= a_{21}F_1 + a_{22}F_2 + \ldots + a_{2p}F_p + U_2 \\
&\vdots \\
x_n - \mu_n &= a_{n1}F_1 + a_{n2}F_2 + \ldots + a_{np}F_p + U_n
\end{aligned}$$

En notación matricial:

$$X - \mu = AF + U \tag{41}$$

Donde,

$X - \mu$: Vector $(n \times 1)$.

A: Matriz $(n \times p)$ de factores comunes, linealmente independientes.

F: Vector $(p \times 1)$ cuyos elementos se conocen como cargas factoriales.

U: Vector $(n \times 1)$ de factores únicos o errores.

Supuestos del Modelo:

1. Los factores comunes tienen media 0.

$$E(F) = 0 \tag{42}$$

2. Los factores comunes tienen varianza 1 y no están correlacionados entre sí.

$$E(FF^t) = I_{p\times p} \tag{43}$$

3. Los factores únicos tienen media 0 y varianza $\sigma^2_{u_i}$.

$$E(U) = 0; E(UU^t) = \Phi_{n\times n} \tag{44}$$

$\Phi_{n\times n}$:es una matriz diagonal, donde los elementos de la diagonal principal son $\sigma^2_{u_i}$

4. Los factores comunes no están correlacionados con los factores únicos.

$$E(UF_l) = 0 \tag{45}$$

Si se cumplen los supuestos anteriores, la matriz de covarianzas de $X = AF + U$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$R = AA' + \Phi \tag{46}$$

La varianza total de un ítem puede descomponerse en la suma de la varianza compartida o común y la varianza específica de cada variable. El análisis factorial se encarga de analizar la varianza común a todos los ítems, que se denominan comunalidades.

Para la estimación de estas.

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 + \sigma_{u_i}^2 \tag{47}$$

Es decir,

$$Var(X_l) = Var(Factores) + Var(Especifica)$$

Donde,

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$: Comunalidad; representa la **varianza explicada** por los factores comunes.

Las cargas factoriales son correlaciones entre las variables y los factores.

Si X está estandarizada, es decir, $E(X) = 0$ y $Var(X) = 1$, entonces los elementos de A representan la correlación existente entre las variables y los factores.

En ese caso el modelo queda de la siguiente forma:

$$X = AF + U \tag{48}$$

$$R = AA' + \Phi \tag{49}$$

Donde,

R: es la matriz de correlaciones.

Si analizamos detenidamente estas ecuaciones podemos observar que R, por ser una matriz simétrica, contiene $n(n+1)/2$ coeficientes conocidos, mientras que los coeficientes desconocidos, correspondientes a A y Φ, son $np+n$. Es decir, si $p > (n-1)/2$, habrá más incógnitas que ecuaciones, por lo que el sistema no tendrá solución única.

Este problema lleva a la necesidad de utilizar algoritmos de estimación para los coeficientes. Para esto se utiliza el método iterativo de componentes principales, es decir, se comienza de una solución inicial y en sucesivos pasos ésta se va mejorando hasta llegar a un resultado óptimo.

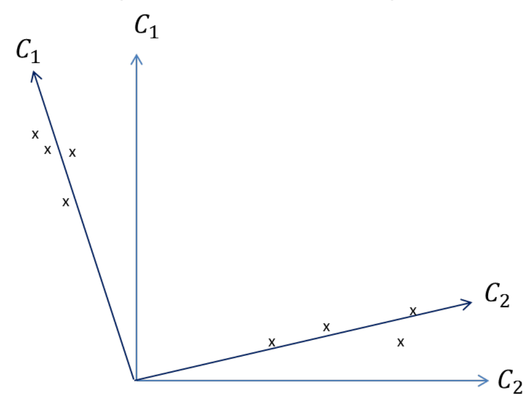
Una vez que se ha decidido el método de extracción de los factores se debe también decidir el número de factores con los que se va a quedar. Esta elección es importante, ya que el objetivo es la reducción de la dimensión del problema sin demasiada pérdida de información.

En los paquetes estadísticos aparecen, esencialmente, dos criterios:

- Considerar los valores propios (eigenvalues) mayores que la unidad. Este es el método por defecto.
- Fijar número de factores según varianza explicada. En este caso nos quedaremos con una cantidad de factores de forma que la varianza explicada por el modelo sea satisfactoria para el investigador.

El primer componente tiene la varianza máxima. Las componentes sucesivas explican progresivamente proporciones menores de la varianza y no están correlacionadas unas con otras. La matriz de componentes de las cargas factoriales son rotadas en el caso que exista más de una componente con valor propio (eigenvalues) mayor a 1, para una mejor interpretación. La rotación utilizada es la **rotación Varimax**, la cual es una rotación ortogonal y hace que se optimice por factores, maximizando la varianza explicada dentro de cada factor, dejando altas las cargas factoriales en los factores a los cuales está asociada, y bajas las cargas factoriales en cuyos factores están menos asociadas.

Figura 10: Rotación Ortogonal



Fuente: elaboración propia.