Agencia de Calidad de la Educación

ESTUDIO PREGUNTAS ABIERTAS MATEMÁTICA TIMSS 2015:

¿QUÉ PODEMOS APRENDER DE LAS EQUIVOCACIONES DE ESTUDIANTES DE 8° BÁSICO EN MATEMÁTICA?

ESTUDIO PREGUNTAS ABIERTAS MATEMÁTICA TIMSS 2015:

¿QUÉ PODEMOS APRENDER DE LAS EQUIVOCACIONES DE ESTUDIANTES DE 8° BÁSICO EN MATEMÁTICA?

Agencia de Calidad de la Educación

ESTUDIO PREGUNTAS ABIERTAS MATEMÁTICA TIMSS 2015:
¿Qué podemos aprender de las equivocaciones de estudiantes de 8° básico en matemática?

Agencia de Calidad de la Educación
División de Estudios
www.agenciaeducacion.cl
Fotografías:

Santiago de Chile

IMPORTANTE

En el presente documento, se utilizan de manera inclusiva términos como “el docente”, “el estudiante”, “el profesor”, “el alumno”, “el compañero” y sus respectivos plurales (así como otras palabras equivalentes en el contexto educativo) para referirse a hombres y mujeres.

Esta opción obedece a que no existe acuerdo universal respecto de cómo aludir conjuntamente a ambos sexos en el idioma español, salvo usando “o/a”, “los/las” y otras similares, y ese tipo de fórmulas supone una saturación gráfica que puede dificultar la comprensión de lectura.

Contenido

Presentación

Frente a la necesidad de impulsar un Sistema Nacional de Evaluación de Aprendizajes de carácter integral y de desarrollar instrumentos, prácticas y estrategias para mejorar los procesos de aprendizaje de los niños, niñas y jóvenes del país, la presente publicación de la Agencia de Calidad de la Educación (en adelante Agencia) pretende entregar información y lineamientos prácticos a los docentes a partir de las equivocaciones comunes en las respuestas de los estudiantes de 8° básico a las preguntas abiertas de Matemática de TIMSS 2015[1].

TIMSS, al igual que los demás estudios internacionales en los que Chile participa, constituye una valiosa fuente de información tanto para las escuelas como para el sistema educativo en su conjunto. Por una parte, estos estudios entregan resultados sobre los niveles de aprendizaje de los estudiantes en diferentes áreas, permitiendo la comparación en el tiempo y entre países.

En segundo lugar, los estudios proporcionan marcos de evaluación que constituyen un valioso material de referencia para los docentes. Junto a lo anterior, el análisis de las equivocaciones de los estudiantes en estos estudios permite detectar los aspectos más desafiantes del proceso de enseñanza-aprendizaje y, con ello, retroalimentar el trabajo pedagógico.

En el proceso de educación de nuestros estudiantes, frecuentemente percibimos las equivocaciones como algo negativo o que debe ser evitado. El presente documento pretende mostrar otra cara de las respuestas incorrectas, destacando su utilidad para la mejora del proceso educativo. Existen diversos estudios, tanto a nivel nacional como internacional, que muestran que el origen de las equivocaciones o respuestas erradas se debe, en su mayoría, a problemas en el proceso de aprendizaje. Dentro de estos problemas, algunos pueden ser atribuibles al desarrollo de los estudiantes, mientras que otros se relacionan con las estrategias de enseñanza utilizadas.

1 TIMMS es el Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias.

Para efectos de esta publicación, nos centraremos en la segunda causa mencionada, es decir, las posibles mejoras que se pueden implementar desde la didáctica para mejorar el proceso de enseñanza–aprendizaje, al ser estas modificables por el docente en la sala de clases. Las preguntas de respuestas abiertas son especialmente valiosos para este fin, ya que, en general, aportan mayor cantidad de información acerca del tipo de estrategias utilizadas por los estudiantes para responder, en comparación con las preguntas de respuesta múltiple.

Frecuentemente, en el desarrollo de las respuestas a las preguntas abiertas, los estudiantes dejan entrever las hipótesis o raciocinios equivocados que los llevaron a una determinada solución. De esta manera, junto con las preguntas liberadas de TIMSS 2015, en la presente publicación, se incluyen ejemplos de respuestas de los estudiantes que ilustran sus estrategias para resolverlas, los que se pueden asociar a dificultades de comprensión de un contenido o desarrollo de una habilidad. Cada pregunta está asociada a un determinado dominio de contenido y dominio cognitivo, correspondientes al marco de evaluación de TIMSS 2015.

El documento presenta la siguiente organización: la primera parte entrega una reseña de TIMSS. Posteriormente, se exponen las preguntas, su descripción y ejemplos de errores reales de estudiantes, junto a posibles explicaciones para estos. Por último, se plantean las conclusiones y recomendaciones prácticas a los docentes para abordar los distintos desafíos asociados a los errores presentados.

ANTECEDENTES

1. Antecedentes

1.1. TIMSS: ESTUDIO INTERNACIONAL DE TENDENCIAS EN MATEMÁTICA Y CIENCIAS

El Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias (TIMSS), es una iniciativa de la Asociación Internacional para la Evaluación del Logro Educativo (IEA), que busca proveer de información de calidad acerca de los logros de aprendizaje de los estudiantes en Matemática y Ciencias en 4° y 8° básico, y de los contextos en los que los estudiantes aprenden.

TIMSS se realiza cada cuatro años desde 1995. Su diseño permite comparar los resultados a lo largo del tiempo y entre los diversos países que participan en el estudio. En TIMSS 2015 participaron 57 países de los cinco continentes, Chile entre ellos. Chile ha formado parte de la medición de 8° básico desde el año 1999, y en 4° y 8° básico desde 2011.

MARCO DE EVALUACIÓN DE TIMSS

2. Marco de evaluación de TIMSS

Para cada nivel, el Marco de Evaluación de Matemática de TIMSS se organiza en torno a dos dimensiones: dominios de contenido y dominios cognitivos. A continuación, se describe cada uno de ellos.

2.1. DOMINIOS DE CONTENIDO

TIMSS considera cuatro dominios de contenido en el área de Matemática, estos son: Números, Álgebra, Geometría, y Datos y Azar.

Números

En 8° básico, este dominio considera tres áreas temáticas diferentes:

- Números racionales.
- Fracciones, decimales y enteros.
- Razón, proporción y porcentaje

El dominio de contenido *Números* está construido sobre la base del dominio del mismo nombre en 4° básico. Se espera que en 8° los estudiantes hayan desarrollado competencias más complejas sobre los conceptos y procedimientos de los números enteros. Del mismo modo, deberían haber ampliado su comprensión matemática sobre los números racionales (fracciones, decimales y enteros).

Fracciones y decimales, son una parte importante de la vida diaria. Ser capaz de calcular con ellos, requiere una comprensión de las cantidades que los símbolos representan. Se espera que los estudiantes comprendan que las fracciones y los decimales son entidades singulares que, tal como los números enteros, se localizan en un único lugar en la recta numérica.

Los estudiantes también deben comprender y ser capaces de calcular con números enteros, a través del movimiento en la recta numérica o modelos de ellas (por ejemplo, termómetros, pérdidas y ganancias).

Los números racionales pueden expresarse de formas diversas, incluyendo razones, proporciones y porcentajes. Un mismo número racional puede ser representado por medio de diversos registros, y los estudiantes deben ser capaces de reconocer las diferencias entre estas, construir relaciones y razonar a partir de ellas.

Álgebra

Los temas medidos en *Álgebra* son los siguientes:

- Expresiones y operaciones algebraicas.
- Ecuaciones e inecuaciones.
- Relaciones y funciones.

El álgebra está extendida en el mundo que nos rodea, permitiendo la expresión de patrones como fórmulas, evitando así la realización de cálculos una y otra vez. De este modo, el álgebra permite la generalización a partir de relaciones. Se espera que los estudiantes sean capaces de resolver problemas del mundo real utilizando modelos algebraicos, además de explicar relaciones en base a conceptos algebraicos.

Los estudiantes deben ir más allá de la comprensión memorizada de una fórmula para comprender que si existe una relación entre dos cantidades y conocen una, entonces pueden encontrar la otra. Esta comprensión conceptual se amplía a las ecuaciones lineales para los cálculos sobre crecimientos a tasas constantes (por ejemplo, pendiente) y expresiones cuadráticas para estudiar el movimiento (por ejemplo, las trayectorias de objetos como cohetes, cometas y pelotas de béisbol).

Las funciones son estudiadas para determinar qué le ocurrirá a una variable en el tiempo, incluyendo cuándo la variable alcanzará su valor más alto o más bajo.

Geometría

En 8° básico se extiende la comprensión de las formas y medidas evaluadas en 4°. Se espera que los estudiantes sean capaces de analizar las propiedades y características de una variedad de figuras de dos y tres dimensiones, y competentes en medidas geométricas (perímetros, áreas y volúmenes). Así también, los estudiantes deben ser capaces de resolver problemas y proporcionar explicaciones basadas en las relaciones geométricas.

Las tres áreas temáticas en *Geometría* son:

- Formas geométricas.
- Medidas geométricas.
- Localización y movimiento.

Datos y azar

Cada vez más, las representaciones tradicionales de datos (gráficos de barras, líneas o circulares) están siendo reemplazadas por otras más complejas. En 8° básico se espera que los estudiantes sean capaces de leer y extraer información fidedigna de una variedad de representaciones gráficas. También, se espera que los estudiantes de 8° tengan familiaridad con los estadísticos que describen una distribución de datos (por ejemplo, media, mediana, moda o varianza) y cómo estos se relacionan con la forma que presentan los gráficos de datos.

Con el fin de evitar ser engañados por las representaciones de datos distorsionadas, los estudiantes deben entender cómo al construir tablas y gráficos es posible falsear la verdad. Por último, se espera que posean nociones básicas en torno a los conceptos relacionados con probabilidad.

El dominio de contenido de *Datos y azar* contiene tres áreas temáticas:

- Características de los conjuntos de datos.
- Interpretación de datos.
- Probabilidades.

2.2. DOMINIOS COGNITIVOS

Con el fin de responder correctamente a las preguntas de TIMSS, los estudiantes necesitan estar familiarizados con los contenidos matemáticos evaluados, pero también deben recurrir a una serie de habilidades cognitivas.

El primer dominio cognitivo, el **conocimiento**, se refiere a los hechos, conceptos y procedimientos que necesitan conocer los estudiantes para responder correctamente. Evalúa habilidades para recordar, reconocer, clasificar, trabajar las cuatro operaciones básicas, obtener información y medir. El segundo, la **aplicación**, se centra en la capacidad de los estudiantes para aplicar el conocimiento y la comprensión conceptual a la hora de resolver problemas o contestar preguntas. Considera las habilidades para determinar el método adecuado a utilizar, representar o modelar datos e implementar estrategias de solución. Por último, el **razonamiento**, va más allá de la solución de problemas de rutina, para abarcar situaciones no conocidas, contextos complejos y problemas con múltiples etapas. Evalúa las habilidades de razonamiento, síntesis e integración, evaluación, inferencia, generalización y argumentación.

ANÁLISIS DE EQUIVOCACIONES EN LAS RESPUESTAS A PREGUNTAS ABIERTAS

3. Análisis de equivocaciones en las respuestas a preguntas abiertas

3.1. METODOLOGÍA DE TRABAJO

La primera etapa del trabajo aquí expuesto consistió en analizar las diversas respuestas de los estudiantes a las preguntas abiertas de TIMSS Matemática, y la posterior clasificación de las equivocaciones dentro de cuatro categorías de acuerdo a su origen más probable[2]. Estas son:

a. Equivocaciones de origen conceptual.
b. Errores de operatoria.
c. Errores de interpretación de la pregunta.
d. Dificultades argumentativas.

Es importante considerar que todas estas causas son atribuibles a dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje y, por lo tanto, modificables. La siguiente tabla incluye una descripción de cada una de estas categorías.

2 La atribución del posible origen o causa de las respuestas equivocadas se realizó en base a la información entregada por los estudiantes en sus respuestas.

Cuadro 1

Tipos de equivocaciones en las respuestas a preguntas abiertas

Equivocaciones de origen conceptual: corresponden a los casos en que la equivocación del estudiante en la respuesta a la pregunta se explica por una idea incorrecta del concepto matemático que se requiere para responder. Siguiendo a Schoenfeld (2010), para efectos del presente análisis, se entiende que el conocimiento de un individuo es la información que tiene disponible para resolver problemas, alcanzar metas o desarrollar una determinada tarea. Este conocimiento puede o no ser correcto. Así, en la resolución de las preguntas presentadas, los estudiantes utilizan conocimientos errados o correctos. Son estos conocimientos previos los que determinan, según esta clasificación, el éxito al momento de responder la pregunta.

En este contexto, estos errores pueden ser de origen didáctico, es decir, producto del sistema de enseñanza o de origen epistemológico, en el caso en que el conocimiento previo lleva a confusiones al momento de establecer conexiones con conceptos más complejos (Brousseau, 1976).

En el presente estudio se detectó que una parte importante de las equivocaciones conceptuales corresponde a respuestas ingenuas de parte de los estudiantes. Estas respuestas son aquellas en los que los estudiantes resuelven el problema haciendo conexiones sin sentido entre la información entregada, por ejemplo, sumando o restando todas las cifras del enunciado sin tener una razón para ello. De este modo, las respuestas ingenuas muestran una falta de comprensión de los conceptos matemáticos involucrados.

Errores de operatoria: este tipo de error se produce cuando El estudiante se equivoca en la operatoria numérica o algebraica, a pesar de poseer el conocimiento matemática para resolver el problema y escoger correctamente la operatoria (Abrate, Pochulu y Vargas, 2006). Las principales causas de estos errores son la distracción o problemas en la memoria de trabajo.

En este análisis, fueron clasificadas como "errores de operatoria" únicamente aquellas respuestas en que el detalle del procedimiento empleado estaba explícito y permitía corroborar que era el correcto. Dado que los estudiantes no escriben la operatoria en todas las ocasiones, es probable que este error haya ocurrido con mayor frecuencia de lo que aquí se reporta, pero no pudo ser detectado.

Errores de interpretación: corresponde a los casos en que las respuestas de los estudiantes muestran una incomprensión de los datos del enunciado o de la tarea solicitada. La principal causa de este tipo de errores es la falta de comprensión lectora.

Asimismo, esta equivocación puede explicarse debido a que los estudiantes están acostumbrados a desarrollar el mismo tipo de problemas por lo que eligen la estrategia a utilizar de manera poco reflexiva, o sin considerar con detención cuáles son las tareas necesarias para abordar el problema (Rico, 1995).

Dificultades argumentativas: entenderemos por argumentación la "actividad social, intelectual y verbal que sirve para justificar o refutar una opinión, y que consiste en hacer declaraciones teniendo en cuenta el receptor y la finalidad con la cual se emiten" (Sardà, 2003, p.123). Esta definición sustenta una de las habilidades de razonamiento del Marco de Evaluación de TIMMS, donde justificar se refiere a "proporcionar argumentos matemáticos para apoyar una estrategia de solución".

En aquellas preguntas que se pide argumentar, los errores clasificados como "dificultades argumentativas" son aquellos en que los estudiantes entregan una respuesta correcta pero sin una justificación, o bien cuya redacción presenta fallas lógicas.

En una segunda etapa, a partir de la clasificación realizada se elaboraron orientaciones con el objetivo de favorecer las mejoras en las prácticas pedagógicas. Dichas recomendaciones fueron posteriormente revisadas por expertos en didáctica de Matemática.

A partir de esta metodología se elaboró una ficha resumen para cada pregunta analizada, las que se exponen a continuación. Estas fichas poseen la siguiente estructura:

1. Título de la pregunta.
2. Clasificación de la pregunta en el Marco de Evaluación de TIMSS.
3. Enunciado tal cual como fue presentado a los estudiantes.
4. Pauta de evaluación de TIMSS.
5. Estadísticas de la pregunta.
6. Equivocaciones frecuentes.
7. Descripción y ejemplos de las equivocaciones observadas.
8. Orientaciones a los docentes.

3.2. DOMINIO DE CONTENIDO: NÚMEROS

3.2.1. EJEMPLO 1: Comparar el tamaño de números decimales

Clasificación de la pregunta en el Marco de Evaluación de TIMSS	
Dominio de contenido	Números
Área del tema	Fracciones, decimales y enteros
Dominio cognitivo	Conocimiento

Enunciado

Escribe <, >, o = en cada casillero para que cada uno de los enunciados sea verdadero.

0,35	☐	0,350
0,35	☐	0,4
0,35	☐	0,305
0,35	☐	0,035

Pauta de evaluación TIMSS

Respuesta correcta

=
<
>
>

Respuesta incorrecta

Incorrectas (incluidas respuestas tachadas, borradas, marcas desordenadas, ilegibles o no relacionadas con la tarea)

Sin respuesta

En blanco

Estadísticas de respuestas	Chile (%)	Promedio países participantes TIMSS (%)
Respuestas correctas	16	42
Respuestas omitidas	3	1
Respuestas incorrectas	81	57
Total	**100**	**100**

Equivocaciones frecuentes

Categoría	Descripción	Cantidad de respuestas	Porcentaje del total de respuestas incorrectas[3]
Equivocaciones de origen conceptual	Considera que entre dos números decimales con la misma parte entera, el número superior es aquel donde el número de cifras decimales es mayor.	121	22
	Considera que entre dos números decimales con la misma parte entera, el número mayor es aquel donde el número de cifras decimales es menor.	114	21
	Si la parte decimal empieza con un cero, este se ignora y el resto se considera como un número natural.	71	13
	Considera que entre dos números decimales con la misma parte entera, el número menor es aquel donde la primera cifra decimal es un cero.	50	9
	Un cero entre dos números que no son cero genera error al leerlo.	36	7
	Otros errores.	149	28

3 Debido a las aproximaciones, es posible que los porcentajes no sumen 100.

Descripción y ejemplos de las equivocaciones encontradas

EQUIVOCACIONES DE ORIGEN CONCEPTUAL:

En esta pregunta se observaron distintos tipos de equivocaciones conceptuales. La primera de ellas corresponde a aquellas respuestas que muestran que, entre dos números de igual parte entera, se considera mayor el que tiene más cifras decimales. Otro error observado fue considerar como mayor a aquel número que tiene menos cifras decimales, ante otro de igual parte entera.

Asimismo, se observó que la presencia de cifras cero entre cifras distintas de cero en la parte decimal genera confusión entre los estudiantes. Una parte importante de ellos, ignora el cero considerando erradamente, por ejemplo, que 0,035 es igual a 0,35.

- **Ejemplos de respuestas de estudiantes de Chile**

Figura 1:

En esta respuesta el estudiante considera que entre dos números decimales con la misma parte entera, es mayor el número que tiene más cifras decimales.

0,35	<	0,350
0,35	>	0,4
0,35	<	0,305
0,35	<	0,035

El error de considerar mayor al número que tiene más cifras en la parte decimal, dado dos números de igual parte entera, puede atribuirse a una concepción inmadura de los números decimales basada en la extensión de las propiedades de los números naturales (Resnick et al., 1989). Esto constituye un obstáculo epistemológico toda vez que el estudiante extrapola propiedades de los conocimientos más simples a los nuevos conocimientos, dificultando la comprensión de la posición de los números decimales en la recta numérica

(Piñero, 2011). Así, siguiendo la lógica de que 350 es mayor que 35, se concluye erróneamente que 0,350 es mayor a 0,35.

Figura 2:

En esta respuesta el estudiante comete errores al comparar números que poseen ceros entre cifras distintas a cero en la parte decimal.

0,35	=	0,350
0,35	<	0,4
0,35	=	0,305
0,35	<	0,035

Los errores cometidos por la presencia de un cero al principio de la parte decimal o entre dos cifras que no son cero, podría deberse a que el cero no tiene una representación explícita en el lenguaje natural hablado, a diferencia de la forma en que se escribe. En otras palabras, en la enumeración escrita existe un dígito cero, pero no existe una palabra que tenga este significado en la enumeración hablada. Por ejemplo, 0,305 es leído erróneamente como "cero coma treinta y cinco" (García, 2011). La falta de congruencia entre el registro de representación semiótico verbal y el registro escrito explicaría este tipo de equivocaciones en los estudiantes (Duval, 1999).

- **Orientaciones a los docentes**

Al abordar la desigualdad entre números decimales, tenga presente que los estudiantes utilizan las concepciones que tienen de los números naturales para comparar números decimales. Para subsanar esto, es muy importante que ellos comprendan el concepto detrás de esta comparación, que es la posición de los números en la recta numérica. No basta con que aprendan a resolver el problema (por ejemplo, contar la cantidad de cifras del número para comparar valores), sino que es necesario que comprendan el sentido conceptual de esta comparación.

Los alumnos deben, además, diferenciar la notación de fracciones decimales con la representación de números decimales. Es bueno advertir que la cantidad de cifras decimales no es un indicador del orden de magnitud del número; no es cierto que 0,10 > 0,100 o 0,100 > 0,10.

Cuide que los alumnos reconozcan el valor posicional de las cifras que conforman el número decimal. Dé ejemplos y sea selectivo al elegir problemas o ejercicios con números que estén constituidos por ceros, de modo que atienda a los distintos tipos de errores que los estudiantes cometen al comparar números.

3.2.2. EJEMPLO 2: ¿Cuál es más grande, 7/12 o 2/3?

Clasificación de la pregunta en el Marco de Evaluación de TIMSS	
Dominio de contenido	Números
Área del tema	Fracciones, decimales y enteros
Dominio cognitivo	Aplicación

Enunciado

¿Cuál es mayor, $\frac{7}{12}$ o $\frac{2}{3}$?

Explica tu respuesta.

Pauta de evaluación TIMSS

Respuesta correcta

Una respuesta que indica que $\frac{2}{3}$ es mayor que $\frac{7}{12}$ en base al denominador común o a decimales, por ejemplo:,

$8/12 > \frac{7}{12}$,   0,667 > 0,583

Nota: $\frac{2}{3}$ puede estar expresado como 0,66, 0,67, 0,666, 0,667, etc.

Nota: Si indica $\frac{2}{3}$ sin explicación, una explicación inadecuada o una explicación errónea, se codifica como incorrecta.

Respuesta incorrecta

Incorrectas (incluidas respuestas tachadas, borradas, marcas desordenadas, ilegibles o no relacionadas con la tarea)

Sin respuesta

En blanco

Estadísticas de respuestas

	Chile (%)	Promedio países participantes TIMSS (%)
Respuestas correctas	7	37
Respuestas omitidas	22	8
Respuestas incorrectas	71	55
Total	**100**	**100**

Equivocaciones frecuentes

Categoría	Descripción	Cantidad de respuestas	Porcentaje del total de respuestas incorrectas[4]
Equivocaciones de origen conceptual	Compara entre sí los numeradores o los denominadores.	134	31
	Compara aditivamente el numerador y el denominador de la fracción.	31	7
Error de operatoria	Convierte erróneamente a decimal, erra al amplificar o asigna incorrectamente los valores en la multiplicación cruzada.	18	4
Dificultades argumentativas	Explicación inadecuada o errónea	134	31
	Responde 2/3 o 7/12 sin explicar.	110	26

4 Debido a las aproximaciones, es posible que los porcentajes no sumen 100.

Descripción y ejemplos de las equivocaciones encontradas

EQUIVOCACIONES DE ORIGEN CONCEPTUAL:

La equivocación más recurrente en esta pregunta es de tipo conceptual. En el 31% de los casos, los estudiantes se equivocan al aplicar los conceptos de comparación de números naturales a fracciones. Se observa que contrastan numeradores y denominadores. Asimismo, se observa con frecuencia que los estudiantes comparan por diferencia y no por cociente. Esto da cuenta de que mantienen la lógica de un pensamiento aditivo en lugar de multiplicativo.

- **Ejemplos de respuestas de estudiantes de Chile**

Figura 1:

En la respuesta el alumno compara los numeradores y los denominadores de ambas fracciones.

Explica tu respuesta.

7/12

Porque 7 es mayor que 2 y 12 es mayor que 3

Figura 2:

Argumenta que en la fracción 2/3 al numerador le falta solo 1 para llegar a la unidad y a la fracción 7/12, le faltan 5.

Explica tu respuesta.

2/3

Porque el dos es más cercano al 3

- **Orientaciones a los docentes**

En ocasiones, algunos estudiantes extraen información aprendida o aplican propiedades válidas en contextos similares, incurriendo en una generalización del conocimiento adquirido previamente en contextos inadecuados. Por ejemplo, sabiendo que $2<7$ y $3<12$, concluyen erróneamente que $2/3<7/12$. El conocimiento sobre los números naturales emerge como obstáculo del aprendizaje de los racionales, sobre todo en la comparación de estos, cuando las fracciones no poseen el mismo denominador (Godino, 2004; Escudero & Domínguez, 2014).

Al abordar la desigualdad entre números fraccionarios, tenga presente que los alumnos utilizan las concepciones que tienen de los números naturales para operar con los números fraccionarios. Es importante fortalecer la amplificación y simplificación de fracciones al mismo denominador, para compararlas mediante el numerador. Proponga a los estudiantes que discutan sus concepciones y argumentos frente a las fracciones y trabaje en mostrar sus diferencias y similitudes.

ERROR DE OPERATORIA:

El 4% de las respuestas de los estudiantes presenta errores de operatoria. Estas respuestas se producen cuando, por ejemplo, los alumnos se equivocan al convertir una fracción a decimal o al realizar la multiplicación cruzada.

- **Ejemplos de respuestas de estudiantes de Chile**

Figura 1:

El estudiante convierte erróneamente de fracción a decimal.

$$7:12 = 0{,}59$$
$$\begin{array}{r} 70 \\ \underline{60} \\ 100 \end{array}$$

- **Orientaciones a los docentes**

Algunos errores de procedimientos provienen de vacíos o errores en el dominio de los conocimientos previos de fracciones o del algoritmo de la división (Godino, 2004; Egodawatte, 2011). Hay evidencia que muestra que la falta de dominio del algoritmo de la división no mejora a partir de su repetición, por paulatino que se haga. La automatización se logra desde la práctica comprensiva. Siguiendo esta lógica, para fortalecer el dominio del algoritmo de la división, se sugiere trabajar reforzando la comprensión conceptual que este requiere, más que en la repetición de ejercicios mecánicos.

En este ejemplo, dividir numerador por denominador es una estrategia correcta. Sin embargo, puede conducir a mayores errores de operatoria, por lo que se debe enfatizar en la comparación mediante un denominador común.

DIFICULTADES ARGUMENTATIVAS:

El 26% de los estudiantes entrega una respuesta breve, usualmente 2/3 o 7/12, sin dar una explicación. Estas se consideran incompletas. Es posible que algunos de ellos se hayan concentrado en determinar cuál es mayor y, debido a la alta demanda cognitiva de la tarea, hayan dejado fuera de la memoria operativa la segunda exigencia: "explica tu pregunta".

- **Orientaciones a los docentes**

La falta de una justificación para la respuesta correcta puede deberse a dos posibles razones. En primer lugar, puede ser consecuencia de limitaciones en la memoria de trabajo. Para fortalecerla, es útil trabajar en estrategias como el mapeo de requerimientos, de tal manera que el estudiante no olvide las partes que debe completar.

Una segunda explicación posible es que la falta de comprensión conceptual limita a los estudiantes en la elaboración de una explicación adecuada. Así, para algunos podría ser difícil explicar con palabras los procedimientos utilizados y cómo estos les permiten llegar a la conclusión expresada. En ocasiones, la falta de comprensión conceptual de las fracciones conduce a realizar una memorización de algoritmos mecánicos para resolver este tipo de tareas. Sin embargo, el estudiante no es capaz de entregar los fundamentos del procedimiento por falta de razonamiento matemático.

Para evitar lo anterior, se sugiere a los profesores favorecer la argumentación junto con la práctica de procedimientos, a fin de que la operación tenga mayor significado que simplemente "encontrar la fracción mayor" a través de un algoritmo. Por ejemplo, al considerar la fracción 2/5 y 1/5, los estudiantes comprenderán fácilmente que 2/5 es mayor que 1/5. La situación cambia al preguntarles por la fracción mayor entre 3/5 y 3/7.

Es importante incentivar a los estudiantes a resolver este tipo de tareas utilizando material didáctico (por ejemplo, figuras de papel divididas en partes iguales), en lugar de un algoritmo mecánico para favorecer la comprensión conceptual de la posición de la fracción en la recta numérica.

Para evitar el olvido y las confusiones, se sugiere que las técnicas emerjan del trabajo progresivo y constante de conceptos integrados. De este modo, los estudiantes podrían indicar diversas razones que les permitan establecer la comparación entre fracciones. Estas razones deben complementarse, haciendo cada vez más sólidos los conocimientos adquiridos con anterioridad.

3.2.3. EJEMPLO 3: Completa la tabla

Clasificación de la pregunta en el Marco de Evaluación de TIMSS	
Dominio de contenido	Números
Área del tema	Fracciones, proporción y porcentaje
Dominio cognitivo	Conocimiento

Enunciado

La tabla muestra el número de papeles que hay en un montón y la altura de este.

Número de papeles en el montón.	100	150	200
Altura del montón (mm).	8		

A. Completa la tabla.

Pauta de evaluación TIMSS

Respuesta correcta

12, 16

Respuesta incorrecta

Un valor incorrecto o ausente.

Otras incorrectas (incluidas respuestas tachadas, borradas, marcas desordenadas, ilegibles o no relacionadas con la tarea).

Sin respuesta

En blanco

Estadísticas de respuestas

	Chile (%)	Promedio países participantes TIMSS (%)
Respuestas correctas	38	53
Respuestas omitidas	32	15
Respuestas incorrectas	30	32
Total	**100**	**100**

Equivocaciones frecuentes

Categoría	Descripción	Cantidad de respuestas	Porcentaje del total de respuestas incorrectas[5]
Equivocaciones de origen conceptual	El estudiante divide la cantidad de papeles en 8 o en 10.	15	11
	Respuestas de razonamiento aditivo.	62	47
	El estudiante amplifica al doble y al triple el valor 8.	38	29
Error de operatoria	Error operatorio de multiplicación o división.	14	12

Descripción y ejemplos de las equivocaciones encontradas

EQUIVOCACIONES DE ORIGEN CONCEPTUAL:

Las respuestas equivocadas a esta pregunta corresponden mayormente a errores de tipo conceptual. La mayor parte de estos, se debe a razonamientos aditivos o multiplicativos erróneos a partir de los datos entregados por la tabla. En

5 Debido a las aproximaciones, es posible que los porcentajes no sumen 100.

estos casos, los estudiantes no realizaron un razonamiento proporcional para determinar la respuesta, sino que completaron la tabla intuyendo la magnitud del incremento de las cantidades. Uno de los razonamientos empleados con mayor frecuencia consiste en asumir que, dado que el incremento en un dato era de 50 unidades, el incremento en el segundo dato debía ser de 5 unidades. También es un error frecuente amplificar la altura inicial del montón de hojas al doble y al triple, para completar la tabla.

- **Ejemplos de respuestas de estudiantes de Chile**

Figura 1:

En la respuesta el estudiante amplifica el valor 8 por 2 y 3.

La tabla muestra el número de papeles que hay en un montón y la altura de este.

Número de papeles en el montón.	100	150	200
Altura del montón (mm).	8	16	24

A. Completa la tabla.

Figura 2:

En la respuesta el estudiante va sumando 5 a la altura del montón.

La tabla muestra el número de papeles que hay en un montón y la altura de este.

Número de papeles en el montón.	100	150	200
Altura del montón (mm).	8	13	18

A. Completa la tabla.

- **Orientaciones a los docentes**

En los contenidos de proporcionalidad, las respuestas equivocadas pueden explicarse por problemas en la comprensión del problema. Esta dificultad lleva frecuentemente a confusiones respecto a qué modelo aditivo o multiplicativo resulta más pertinente para resolver la situación. Investigaciones realizadas a docentes en formación muestran que el énfasis en la utilización de algoritmos o fórmulas rutinarias para la resolución del problema, dificulta la comprensión de las relaciones proporcionales.

Así, el desafío es trabajar con los estudiantes para que logren captar la relación multiplicativa entre dos cantidades y luego la apliquen a otra cantidad. Para ello, es recomendable ejercitar la utilización de datos dispuestos en diferentes tipos de tablas y gráficos. Asimismo, se sugiere trabajar la comprensión de las distintas interpretaciones de las relaciones proporcionales y la constante de proporción. Por último, es importante plantear y comparar problemas que requieran utilizar modelos aditivos y/o multiplicativos, para identificar cuándo usar uno u otro.

3.2.4. EJEMPLO 4: ¿Quién gasta más en zapatos?

Clasificación de la pregunta en el Marco de Evaluación de TIMSS	
Dominio de contenido	Números
Área del tema	Fracciones, decimales y enteros
Dominio cognitivo	Razonamiento

Enunciado

Tomás y su hermano Pedro recibieron la misma cantidad de dinero.

Tomás gastó $\frac{1}{3}$ de su dinero en libros y $\frac{3}{5}$ del dinero restante para comprar un nuevo par de zapatos.

Pedro gastó $\frac{3}{5}$ de su dinero para comprar un nuevo par de zapatos.

¿Quién gastó más en zapatos?

(Marca un casillero)

- ☐ Tomás gastó más dinero en zapatos.
- ☐ Pedro gastó más dinero en zapatos.
- ☐ Ambos gastaron la misma cantidad de dinero en zapatos.

Explica tu respuesta.

Pauta de evaluación TIMSS

Respuesta correcta

Pedro y una explicación correcta usando fracciones / decimales / porcentajes / dibujos / o cantidades arbitrarias.

Ejemplos:

$$\frac{2}{3} * \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$$

$\frac{3}{5}$ *de un entero es mayor que* $\frac{3}{5}$ *de parte de un entero.*

0,4 es menor que 0,6.

40% es menos que 60%.

Si ambos tenían 30 zeds, Tomás gastó 12 zeds en zapatos, pero Pedro gastó 18 zeds.

Respuesta incorrecta

El estudiante eligió, "Ambos gastaron el mismo monto en zapatos".

Otras incorrectas (incluidas respuestas tachadas, borradas, marcas desordenadas, ilegibles o no relacionadas con la tarea).

Sin respuesta

En blanco

Estadísticas de respuestas

	Chile (%)	Promedio países participantes TIMSS (%)
Respuestas correctas	9	20
Respuestas omitidas	11	6
Respuestas incorrectas	80	74
Total	**100**	**100**

Equivocaciones frecuentes			
Categoría	**Descripción**	**Cantidad de respuestas**	**Porcentaje del total de respuestas incorrectas[6]**
Equivocaciones de origen conceptual	Confunde 3/5 de una cantidad con 3/5 de una parte de esa cantidad, señalando que ambos gastaron lo mismo en zapatos.	293	56
Error de interpretación	Responde quién gastó más (en total) en lugar de quién gastó más en zapatos.	88	17
Dificultades argumentativas	Argumentación incoherente, insuficiente, o inexistente.	129	25
Otros errores	Otros errores	14	3

Descripción y ejemplos de las equivocaciones encontradas

EQUIVOCACIONES DE ORIGEN CONCEPTUAL:

Este tipo de equivocación representa más de la mitad de las respuestas incorrectas. Los alumnos que cometen este error asumen que 3/5 de una cantidad de dinero es igual a 3/5 de una parte de esa cantidad. Esta confusión muestra que los estudiantes poseen un concepto inicial o ingenuo de fracción, ya que se centran únicamente en la noción de fracción como "parte de un todo", sin tener en cuenta que "el todo puede variar".

En la tarea planteada, la fracción 3/5 es un "operador" multiplicativo, que multiplica por 3/5 la cantidad a la cual se vincula, en este caso a la unidad (el todo) y luego a 2/3 (una parte del todo). Los estudiantes que cometen este error no comprendieron el sentido matemático asociado a la situación, a saber "3/5 de 1 > 3/5 de 2/3".

6 Debido a las aproximaciones, es posible que los porcentajes no sumen 100.

- **Ejemplos de respuestas de estudiantes de Chile**

Figura 1:

El estudiante argumenta aludiendo a que los dos gastaron 3/5.

☐ Tomás gastó más dinero en zapatos.

☐ Pedro gastó más dinero en zapatos.

☒ Ambos gastaron la misma cantidad de dinero en zapatos.

Explica tu respuesta.

Los 2 gastaron 3/5 en zapatos

Pero Tomás más plata comprando libros que lo que gastó
Pedro le sobra plata para más cosas

- **Orientaciones a los docentes**

La literatura distingue cinco sub-constructos dentro del concepto de fracción: Parte todo, Razón, Cociente, Medida y Operador. En este problema, se puede observar que los estudiantes manejan el uso de la noción “Parte todo”, pero no manejan el constructo operador multiplicativo o no son capaces de distinguir situaciones problema que requieren utilizar este último. En particular, no consideraron que Tomás usó 3/5 de una cantidad que era parte de un dinero, no de todo el dinero. La variedad de significados que puede tener una fracción conlleva dificultades de aprendizaje, tanto relacionadas con el concepto como con las operaciones con fracciones.

Al abordar la multiplicación de fracciones, se sugiere enfatizar el rol de operador de las fracciones refiriendo al uso del conectivo “de”. Por ejemplo, “3/5 de 2/3”, “la mitad de 3/4”, “el doble de 5/8” o “2/5 de 20”. Para lograr una cabal comprensión de este constructo es también útil vincular las fracciones con porcentajes y con razones. Por ejemplo, “el 25% de 3/4” o “de las 60 manzanas del cajón, dos de cada tres están maduras”.

ERROR DE INTERPRETACIÓN:

El 17% de las respuestas equivocadas corresponden a casos en que los estudiantes declararon que Tomás gastó más. En estos casos es posible inferir que los estudiantes responden a la pregunta “quien gastó más” y no a “quién gastó más en zapatos”. Esto podría deberse a una distracción o sobrecarga en la memoria de trabajo de los estudiantes. Otra razón podría ser que el concepto de fracción involucrado en el contexto del problema lleva a que estos estudiantes pierdan el sentido de la situación.

- **Ejemplos de respuestas de estudiantes de Chile**

Figura 1:

El estudiante responde que Tomás gastó más porque también compró libros.

- [x] Tomás gastó más dinero en zapatos.
- [ ] Pedro gastó más dinero en zapatos.
- [ ] Ambos gastaron la misma cantidad de dinero en zapatos.

Explica tu respuesta.

Tomás también se compró libros a parte de zapatos.

- **Orientaciones a los docentes**

La literatura asocia este tipo de equivocaciones a insuficiencias de origen cognitivo: error por sobrecarga en la memoria de trabajo. Johnson-Laird (1983) sostiene que el aprendiz novato puede sobrecargar su memoria de trabajo por no disponer de esquemas que soporten su tarea, lo que llevaría a fallos en el manejo de la información en juego.

También hay interpretaciones asociadas a la comprensión lógica. Ryon et al. (2007) estudió el desarrollo de la argumentación lógica y su relación con los contextos. En este caso, al tratarse de un contexto asociado a fracciones, el estudiante podría perder el sentido de las magnitudes de las cantidades asociadas a la situación, lo que repercutiría en el error de comprensión lógica del problema.

Se sugiere enseñar a los estudiantes, técnicas para no sobrecargar la memoria de trabajo, por ejemplo, consolidando conocimientos en la memoria de largo plazo y usando representaciones pictóricas que faciliten la comprensión (Isoda et al., 2012). También, se aconseja dar suficiente tiempo en clases para que el alumno piense por sí mismo y haga una representación personal de los problemas, como lo ejemplifica el enfoque abierto de resolución de problemas.

3.3. DOMINIO DE CONTENIDO: ÁLGEBRA

3.3.1. EJEMPLO 5: Regla para obtener términos en una secuencia numérica

Clasificación de la pregunta en el Marco de Evaluación de TIMSS	
Dominio de contenido	Álgebra
Área del tema	Relaciones y funciones
Dominio cognitivo	Razonamiento

Enunciado

$$-3, 6, -12, 24, \ldots$$

Escribe una regla de manera que si conoces cualquier término de esta secuencia puedas encontrar el siguiente término.

Regla:

Pauta de evaluación TIMSS
Respuesta correcta
Multiplicar cada término por -2 para obtener el término siguiente / Multiplicar por 2 y cambiar el signo / o equivalente.
Respuesta incorrecta
Multiplicar el término previo al anterior por 4, tratando la secuencia como 2 secuencias separadas para los términos positivos y negativos o un equivalente.
Otras incorrectas (incluidas respuestas tachadas, borradas, marcas desordenadas, ilegibles o no relacionadas con la tarea)
Sin respuesta
En blanco

Estadísticas de respuestas

	Chile (%)	Promedio países participantes TIMSS (%)
Respuestas correctas	7	25
Respuestas omitidas	41	22
Respuestas incorrectas	52	53
Total	**100**	**100**

Equivocaciones frecuentes

Categoría	Descripción	Cantidad de respuestas	Porcentaje del total de respuestas incorrectas[7]
Equivocaciones de origen conceptual	Identifica parcialmente el patrón, es decir, multiplica por 2; alterna los signos en los términos; o bien multiplicar por 2 cometiendo un error en el cambio de signo.	41	13
	Ordena los números de forma creciente o decreciente.	128	40
	Realiza cálculos aditivos o multiplicativos que no llevan a la respuesta.	53	17
	Entrega una respuesta no atingente al problema.	60	19
Dificultades argumentativas	Explica un caso particular del patrón, sin generalizar.	10	3
	Usa el patrón y no lo escribe o explicita.	28	9

7 Debido a las aproximaciones, es posible que los porcentajes no sumen 100.

Descripción y ejemplos de las equivocaciones encontradas

EQUIVOCACIONES DE ORIGEN CONCEPTUAL:

El 88% de las respuestas incorrectas a la pregunta corresponden a equivocaciones de origen conceptual. Se observan tres tipos de errores de naturaleza conceptual. El primero, corresponde a los casos en que el estudiante identifica una regla de formación común a todos los términos conocidos, pero esta es parcial. Una posible explicación para esto en base a las respuestas observadas, es que los alumnos observan solo el cambio de signo entre los términos consecutivos, o bien solo la variación numérica, ignorando la existencia de los signos. Un segundo error de naturaleza conceptual obedece a la confusión generada por la aparición de la palabra "regla", pues evoca en los estudiantes la idea de orden de números enteros y números naturales, siendo esta la equivocación conceptual más frecuentemente observada. La última equivocación conceptual corresponde a la formulación de reglas aditivas o multiplicativas a partir de situaciones particulares, en este caso, considerando solo dos términos consecutivos.

- **Ejemplos de respuestas de estudiantes de Chile**

Figura 1:

El estudiante intenta describir una regla para encontrar un término de la secuencia dado el término anterior, evocando erróneamente la idea de orden.

Regla:

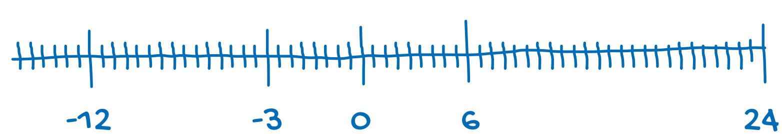


Figura 2:

El estudiante identifica erróneamente la diferencia entre "–12" y "24" y la define como el patrón de la secuencia numérica. Los alumnos tienden a no verificar que la regla se cumpla en todos los casos.

Regla:

De 12 en 12, partiendo por el -3

- **Orientaciones a los docentes**

En tareas de este tipo es fundamental la activación del pensamiento deductivo e inductivo (Pedemonte, 2001; Simon, 1996). Los niños que están en el período inductivo, usan la secuencia numérica para anticipar un término de la serie (Ortiz, 1997).

En este caso, el conocimiento conceptual es el objeto "secuencia numérica" que es definido como una "progresión" dada por la relación generatriz. Esta progresión es una serie discreta que comienza en un primer término, y que continúa consecutivamente, donde dos términos cualesquiera de la misma presentan la relación generatriz. Es decir, una secuencia numérica queda definida por un primer término y una regla que se aplica recursivamente (Fernández, 2001).

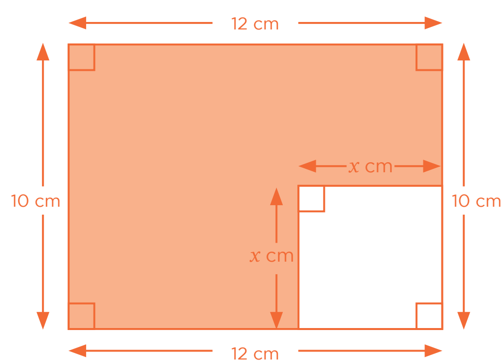
Se aconseja ayudar al estudiante a tomar conciencia de la necesidad de identificar una relación invariante entre dos términos consecutivos, independiente de cuáles elija. Es importante a la vez, dar relevancia al proceso de simbolización de la generatriz, pues esto le ayudará a comprender que es posible reconstruir la secuencia determinando incluso aquellos términos que no han sido dados a conocer.

Una vez que los estudiantes comiencen a conceptualizar la idea de generatriz, cobrará sentido para ellos el proceso de verificación de sus hipótesis o resultados. Es bueno sugerirles verificar con los términos conocidos si, dada su generatriz, es posible definir en todos los casos el término siguiente.

3.3.2. EJEMPLO 6: Expresión para calcular el área

Clasificación de la pregunta en el Marco de Evaluación de TIMSS	
Dominio de contenido	Álgebra
Área del tema	Expresiones y operaciones algebráicas.
Dominio cognitivo	Razonamiento.

Enunciado



Escribe una expresión en términos de x para el área de la parte **sombreada** de la figura.

Respuesta: ________________ cm^2

Pauta de evaluación TIMSS

Respuesta correcta
$120 - x^2$ o equivalente.
Respuesta incorrecta
Incorrectas (incluidas respuestas tachadas, borradas, marcas desordenadas, ilegibles o no relacionadas con la tarea)
Sin respuesta
En blanco

Estadísticas de respuestas

	Chile (%)	Promedio países participantes TIMSS (%)
Respuestas correctas	3	16
Respuestas omitidas	32	15
Respuestas incorrectas	65	69
Total	**100**	**100**

Equivocaciones frecuentes

Categoría	Descripción	Cantidad de respuestas	Porcentaje del total de respuestas incorrectas[8]
Equivocaciones de origen conceptual	Calcula el perímetro, semiperímetro o suma de algunos de los lados de la figura.	102	23
	Determina una expresión algebraica o ecuación que no tiene que ver con el área de la figura sombreada.	220	50
Error de interpretación	Determina el área de la figura completa y no de la figura sombreada.	16	4
	Responde el supuesto valor de "x"	102	23

Descripción y ejemplos de las equivocaciones encontradas

EQUIVOCACIONES DE ORIGEN CONCEPTUAL:

El 73% de las respuestas incorrectas en esta pregunta corresponden a equivocaciones conceptuales vinculados al área y perímetro de figuras. Se observa

8 Debido a las aproximaciones, es posible que los porcentajes no sumen 100.

alta presencia de procedimientos que no están relacionados con el concepto de área, como por ejemplo, relaciones aditivas entre las medidas dadas.

- **Ejemplos de respuestas de estudiantes de Chile**

Figura 1:

El estudiante determina el perímetro del rectángulo mayor.

Escribe una expresión en términos de *x* para el área de la parte **sombreada** de la figura.

Respuesta: 44 cm²

Figura 2:

El estudiante asocia el área con la multiplicación de todos los lados de un cuadrado.

Escribe una expresión en términos de *x* para el área de la parte **sombreada** de la figura.

Respuesta: $x \cdot x \cdot x \cdot x = 4x$ cm²

- **Orientaciones a los docentes**

El análisis de las respuestas incorrectas de los estudiantes muestra evidencia de que es común la confusión entre el concepto de área y perímetro. Una posible explicación para esto, es que los estudiantes, por lo general, no disponen de oportunidades suficientes para la exploración práctica de los fundamentos de estas ideas y de las relaciones que las ligan.

Así, se sugiere proponer a los estudiantes situaciones prácticas donde pongan en juego los conceptos de área y perímetro. Por ejemplo, se les puede solicitar inventar problemas de la vida real para que sus compañeros utilicen estos conceptos de forma contextualizada, pudiéndose ayudar de una cuadrícula para representarlas.

Se sugiere, asimismo, dar relevancia a las unidades de medida en el trabajo con los estudiantes, por ejemplo, preguntándoles cómo distinguir si un resultado corresponde a un área o a un perímetro. El uso de material concreto es útil para que los estudiantes comprendan la unidimensionalidad del perímetro y la bidimensionalidad del área.

ERROR DE INTERPRETACIÓN DE LA PREGUNTA:

El 27% de las respuestas incorrectas a esta pregunta corresponde a errores de interpretación. Dentro de estas, la mayoría buscaba determinar el valor de la variable “x”, aun cuando no era esto lo que se solicitaba. Este error puede estar relacionado con la “aritmetización” del álgebra, pues el que aparezca una *x* en la pregunta planteada, evoca en los estudiantes una situación de búsqueda y los lleva a intentar resolver la incógnita.

Hubo, asimismo, una proporción de estudiantes que, habiendo sido capaces de calcular áreas, no consiguieron interpretar qué área debían expresar.

- **Ejemplos de respuestas de estudiantes de Chile**

Figura 1:

El estudiante entrega un valor para “x” a partir de la aproximación visual visualización.

Escribe una expresión en términos de *x* para el área de la parte **sombreada** de la figura.

Respuesta: mide aprox. 5 cm^2

- **Orientaciones a los docentes**

El paso de la aritmética al álgebra genera diversas dificultades para los estudiantes. Una de ellas, es la tendencia a intentar resolver el valor de la incógnita, aun cuando no sea esta la tarea solicitada. La comprensión de las letras en álgebra se ve dificultada ya que la mayoría de los estudiantes las tratan como incógnitas específicas –número desconocido– más que como números generalizados o como variables (Kuchemann, 1981).

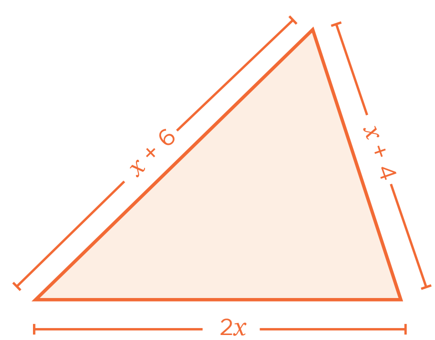
Para evitar lo anterior, se sugiere plantear con frecuencia situaciones donde las letras sean usadas como números generalizados. También, analizar con los estudiantes en qué casos es necesario determinar el valor de la letra y cuándo es necesario dejarla simplemente expresada.

Se recomienda no centrar el trabajo del álgebra exclusivamente en la operatoria de expresiones, dando también relevancia a los procesos de modelación. Es a partir de ellos que los estudiantes pueden conceptualizar los distintos usos de las letras según la situación que estén enfrentando.

3.3.3. EJEMPLO 7: Escribe una ecuación para encontrar "x"

Clasificación de la pregunta en el Marco de Evaluación de TIMSS	
Dominio de contenido	Álgebra
Área del tema	Ecuaciones e inecuaciones
Dominio cognitivo	Aplicación

Enunciado



La suma de las medidas de los lados de este triángulo es de 30 cm.

A. Escribe una ecuación que te permita encontrar el valor de *x*.

Ecuación:

B. ¿Cuál es la medida del lado MAYOR del triángulo, en centímetros?

Respuesta: ___________ cm.

Pauta de evaluación TIMSS
Respuesta correcta
$4\,x + 10 = 30$ o equivalente (por ej., $4\,x = 30 - 10$).
Respuesta incorrecta
Una expresión (no ecuación) correcta, por ej., $4\,x + 10$ o una afirmación correcta sin x por ej., $4 * 5 + 10 = 30$.
Otras incorrectas (incluidas respuestas tachadas, borradas, marcas desordenadas, ilegibles o no relacionadas con la tarea)
Sin respuesta
En blanco

Estadísticas de respuestas	Chile (%)	Promedio países participantes TIMSS (%)
Respuestas correctas	11	29
Respuestas omitidas	47	22
Respuestas incorrectas	42	49
Total	**100**	**100**

Equivocaciones frecuentes

Categoría	Descripción	Cantidad de respuestas	Porcentaje del total de respuestas incorrectas[9]
Equivocaciones de origen conceptual	Responde con el valor de *x* en lugar de plantear la ecuación.	42	17
	Indica la suma de las expresiones algebraicas pero no plantea la ecuación.	68	28
	Plantea una igualdad donde los sumandos actúan como coeficientes de la "x".	36	15
	Plantea una ecuación incompleta o con errores en los signos de los términos.	54	22
	Plantea una ecuación con datos que no corresponden a los del problema.	38	16
	Otros errores.	6	2

Descripción y ejemplos de las equivocaciones encontradas

EQUIVOCACIONES DE ORIGEN CONCEPTUAL:

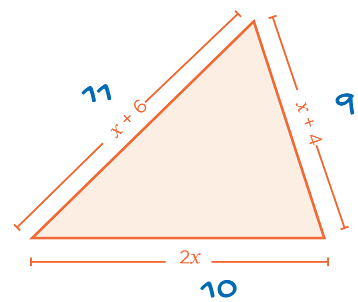
El 98% de las respuestas incorrectas corresponde a equivocaciones de tipo conceptual. En esta pregunta la ecuación debía ser usada como una herramienta para resolver un problema. Muchos estudiantes tienen una concepción de ecuación limitada a la búsqueda de un número (resolver la incógnita) y retroceden al lenguaje numérico particularizando las expresiones para obtener una respuesta. Así, la mayoría de los errores asociados a esta categoría se refieren a la imposibilidad de plantear la ecuación. En el contexto de resolución de problemas se busca establecer una relación entre el lenguaje verbal y el lenguaje algebraico que permita plantear la ecuación que modela la situación. Por ejemplo, expresar previamente el objeto (en este caso el área sombreada) en lenguaje verbal y después transferirlo en una expresión algebraica.

9 Debido a las aproximaciones, es posible que los porcentajes no sumen 100.

- **Ejemplos de respuestas de estudiantes de Chile**

Figura 1:

El estudiante, no plantea una ecuación.



La suma de las medidas de los lados de este triángulo es de 30 cm.

A. Escribe una ecuación que te permita encontrar el valor de *x*.

Ecuación: $x + 6 + 2x + x + 4$

Figura 2:

El estudiante, plantea una igualdad
donde los sumandos actúan como coeficientes de las variables.

La suma de las medidas de los lados de este triángulo es de 30 cm.

A. Escribe una ecuación que te permita encontrar el valor de *x*.

Ecuación: $6x + 4x + 2x = 30$

- **Orientaciones a los docentes**

La comprensión de problemas donde hay transformaciones entre el lenguaje verbal y el algebraico está dirigida por ciertos procesos y estrategias de identificación y de elaboración que dan cuenta de asociaciones entre las expresiones matemáticas y la situación planteada (Londoño et al., 2011). Cuando estas asociaciones no se establecen o son defectuosas es posible que el estudiante no logre plantear la ecuación solicitada.

También es posible que los estudiantes realicen un cambio de registro verbal a algebraico pero solo parcialmente, presentando un planteamiento equivocado o incompleto. Esto revela un conocimiento no adecuado de la estructura y de la sintaxis algebraica, lo que imposibilita encontrar la expresión simbólica pertinente (Azarquiel, 1991).

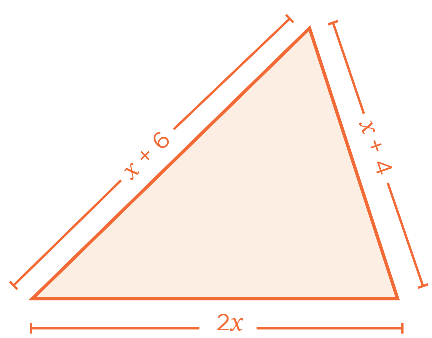
Se sugiere hacer énfasis en las relaciones y diferencias entre expresiones algebraicas y ecuaciones, vinculándolas a contextos específicos. Es importante ejercitar el cambio del lenguaje verbal al lenguaje algebraico, y viceversa, usando distintas situaciones contextualizadas. Por ejemplo, mostrar una ecuación y pedir a los estudiantes que diseñen una situación que pueda ser representada por dicha ecuación.

Si se usan tablas o reglas para la traducción entre el lenguaje verbal y el lenguaje algebraico, se sugiere que estas sean construidas por los mismos estudiantes. Además, es fundamental incluir la modelación como una actividad habitual en el aula.

3.3.4. EJEMPLO 8: Largo del lado más largo del triángulo

Clasificación de la pregunta en el Marco de Evaluación de TIMSS	
Dominio de contenido	Álgebra
Área del tema	Ecuaciones e inecuaciones
Dominio cognitivo	Aplicación

Enunciado



La suma de las medidas de los lados de este triángulo es 30 cm.

A. Escribe una ecuación que te permita encontrar el valor de x.

Ecuación:

B. ¿Cuál es la medida del lado MAYOR del triángulo, en centímetros?

Respuesta: ____________ cm.

Pauta de evaluación TIMSS
Respuesta correcta
11.
Una respuesta correcta consistente con una ecuación incorrecta en la parte A.
Respuesta incorrecta
5 ó 10
Otras incorrectas (incluidas respuestas tachadas, borradas, marcas desordenadas, ilegibles o no relacionadas con la tarea)
Sin respuesta
En blanco

Estadísticas de respuestas

	Chile (%)	Promedio países participantes TIMSS (%)
Respuestas correctas	9	28
Respuestas omitidas	47	22
Respuestas incorrectas	44	50
Total	**100**	**100**

Equivocaciones frecuentes			
Categoría	Descripción	Cantidad de respuestas	Porcentaje del total de respuestas incorrectas[10]
Equivocaciones de origen conceptual	Asume arbitrariamente que la expresión 2x es la mayor y entrega valor 10.	18	7
	Asigna un valor incorrecto a la incógnita (no consistente con una ecuación planteada en parte A).	78	31
	Escoge el número mayor entre los datos del problema y responde 6.	36	14
	Realiza operaciones ignorando la incógnita.	36	14
Error de interpretación	Responde con el valor hallado para "x" y no encuentra el lado mayor del triángulo.	37	15
	Responde x+6 sin entregar el valor de "x".	34	14
	Responde con una expresión algebraica (distinta a x+6) y no con un valor numérico.	12	5

Descripción y ejemplos de las equivocaciones encontradas

EQUIVOCACIONES DE ORIGEN CONCEPTUAL:

El 66% de las respuestas incorrectas corresponde a equivocaciones de tipo conceptual. Las equivocaciones conceptuales en esta pregunta, están relacionadas con una comprensión superficial de los conceptos de expresiones algebraicas y ecuaciones. En una tarea compleja como esta, que involucra encontrar el valor de la incógnita para reemplazarla en las tres expresiones que indican la longitud de los lados del triángulo y luego elegir el número mayor, las respuestas de los estudiantes reflejan confusión. Ellos entregan respuestas ingenuas, por ejemplo, asumiendo que 2x es el lado mayor (probablemente

10 Debido a las aproximaciones, es posible que los porcentajes no sumen 100.

debido a que la operación involucra una multiplicación en lugar de una suma). En otros casos simplemente eligen el mayor valor entre los planteados en la figura y responden 6. Otra estrategia equivocada que se observó frecuentemente, es asignar un valor arbitrario a la "x" y luego encontrar el mayor valor.

- **Ejemplos de respuestas de estudiantes de Chile**

Figura 1:

El estudiante escoge el número mayor entre los datos del problema.

A. Escribe una ecuación que te permita encontrar el valor de x.

Ecuación: $6 + 4 + 2 = x$

B. ¿Cuál es la medida del lado MAYOR del triángulo, en centímetros?

Respuesta: 6 cm.

Figura 2:

El estudiante asigna valores arbitrarios a la incógnita y a los lados del triángulo.

A. Escribe una ecuación que te permita encontrar el valor de x.

Ecuación: 15, 10, 5

B. ¿Cuál es la medida del lado MAYOR del triángulo, en centímetros?

Respuesta: 15 cm.

- **Orientaciones a los docentes**

En la sala de clases, las variables suelen presentarse como un concepto que se entiende fácilmente. Sin embargo, no todos los estudiantes lo asimilan de esta manera (Juárez, 2011). Lo anterior, debido a que por lo general los alumnos le atribuyen cualidades distintas a las variables. Por ejemplo, los estudiantes ignoran las incógnitas (representadas por letras) o su existencia es reconocida pero no se le atribuye ningún significado (Küchemann, 1980).

Se sugiere desarrollar actividades que le permitan al estudiante apropiarse del lenguaje algebraico y darle significado amplio. También, profundizar en la comprensión de las expresiones algebraicas.

ERROR DE INTERPRETACIÓN:

En esta categoría se ubicaron las respuestas que simplemente entregaron el valor de la incógnita como respuesta, o bien, que estaban formuladas como expresiones algebraicas en lugar de un valor. El primero de los errores puede deberse al excesivo énfasis que se hace a los aspectos procedimentales o algorítmicos, y a la idea de que una ecuación solo se limita a buscar el valor de una incógnita. En el segundo caso, los estudiantes confunden cuando se les pide entregar una expresión algebraica en función de una cierta variable y cuándo deben entregar un valor específico.

- **Ejemplos de respuestas de estudiantes de Chile**

Figura 1:

El estudiante responde con el valor hallado para "x".

A. Escribe una ecuación que te permita encontrar el valor de x.

Ecuación: $x + 6 + x + 4 + 2x = 30$

B. ¿Cuál es la medida del lado MAYOR del triángulo, en centímetros?

Respuesta: 5 cm.

$$x + 6 + x + 4 + 2x = 30$$

$$x + x + 2x = 30 - 6 - 4$$

$$4x = 20$$

$$x = 5$$

- **Orientaciones a los docentes**

La comprensión lectora de los enunciados verbales de problemas aritmético-algebraicos, así como la comprensión de las situaciones y de los contextos, son fuente de dificultades para los estudiantes cuando se enfrentan a una tarea. Es importante exponerlos a problemas con situaciones más complejas, guiándolos en la descomposición de la resolución del problema en diversos pasos. Se sugiere trabajar cotidianamente en la resolución de problemas, intercalando estrategias de trabajo individual y discusión grupal. Se sugiere variar el tipo de tareas y desafíos propuestos a los estudiantes.

Por último, al trabajar la resolución de problemas, es recomendable incentivar a los estudiantes a verificar sus respuestas, esto es, comprobar los razonamientos realizados y los resultados obtenidos situándolos en el contexto del problema.

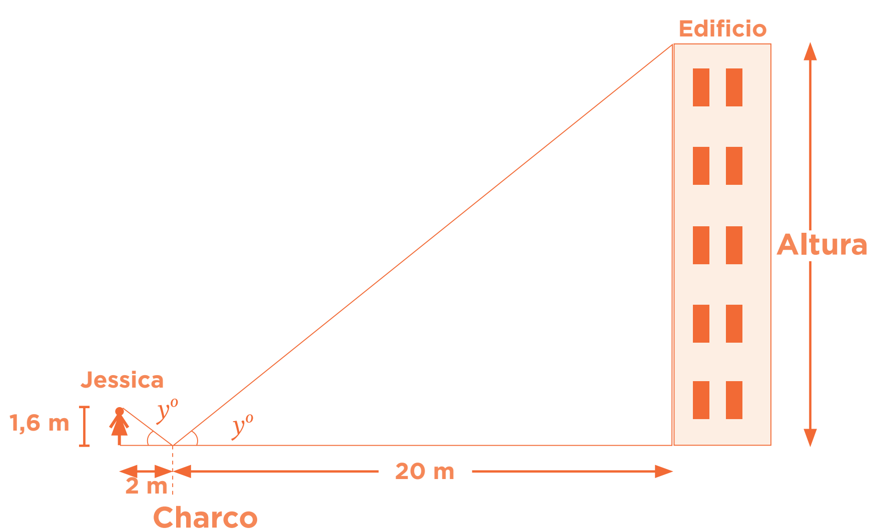
3.4. DOMINIO DE CONTENIDO: GEOMETRÍA

3.4.1. EJEMPLO 9: La altura del edificio

Clasificación de la pregunta en el Marco de Evaluación de TIMSS	
Dominio de contenido	Geometría
Área del tema	Medición geométrica
Dominio cognitivo	Razonamiento

Enunciado

Jessica está parada cerca de un charco en el cual puede ver el reflejo de la parte superior del edificio del frente. Su línea de visión forma un ángulo de y^o con el charco y refleja el mismo ángulo.



Dadas las alturas y distancias mostradas en la imagen, ¿cuál es la altura del edificio?

Respuesta: ________________ m

Pauta de evaluación TIMSS
Respuesta correcta
16
Respuesta incorrecta
Incorrectas (incluidas respuestas tachadas, borradas, marcas desordenadas, ilegibles o no relacionadas con la tarea)
Sin respuesta
En blanco

Estadísticas de respuestas

	Chile (%)	Promedio países participantes TIMSS (%)
Respuestas correctas	6	15
Respuestas omitidas	28	17
Respuestas incorrectas	66	68
Total	**100**	**100**

Equivocaciones frecuentes

Categoría	Descripción	Cantidad de respuestas	Porcentaje del total de respuestas incorrectas[10]
Equivocaciones de origen conceptual	Responde 20, asumiendo que los dos catetos son iguales.	107	23
	Intenta utilizar el teorema de Pitágoras.	85	18
	Opera los números de manera inadecuada.	128	27
	Otros errores.	149	32

11 Debido a las aproximaciones, es posible que los porcentajes no sumen 100.

Descripción y ejemplos de las equivocaciones encontradas

EQUIVOCACIONES DE ORIGEN CONCEPTUAL:

Gran parte de las equivocaciones corresponde a respuestas ingenuas en las que los estudiantes quisieron llegar a una solución por medio del conocimiento disponible. Destacan tres tipos de procedimientos. El primero es asumir que se trata de un triángulo isósceles; el segundo, corresponde a estudiantes que intentaron utilizar el Teorema de Pitágoras; por último, algunos estudiantes trabajaron los números en forma aditiva o a partir de relaciones numéricas que les permitía inferir el dibujo.

- **Ejemplos de respuestas de estudiantes de Chile**

Figura 1:

El estudiante suma cinco veces el 16, confundiéndolo con el 1,6m. Posiblemente utilizó el cinco porque hay cinco filas de ventanas (cinco pisos).

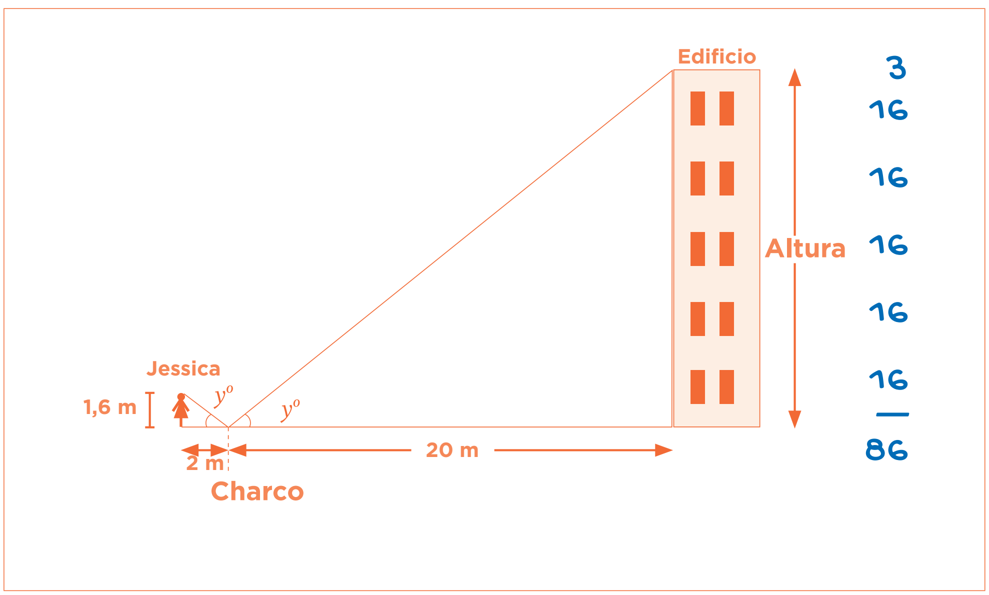


Figura 2:

El estudiante desarrolla el Teorema de Pitágoras con algunos datos del problema.

Dadas las alturas y distancias mostradas en la imagen, ¿cuál es la altura del edificio?

Respuesta: $\sqrt{402,56}$ m

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$1,6^2 + 20^2 = c^2$$

$$2,56 + 400 = c^2$$

$$402,56 = c^2$$

- **Orientaciones a los docentes**

Las respuestas ingenuas muestran falta de comprensión de los conceptos matemáticos involucrados. Específicamente, aquí se observa un obstáculo epistemológico dentro del concepto de proporción.

Se sugiere poner énfasis en la diferenciación de modelos que se resuelven usando la adición de aquellos que se resuelven mediante linealidad. Para esto, es necesario que durante las clases se identifiquen y discriminen las situaciones aditivas y multiplicativas, a fin de que los estudiantes observen que el conocimiento previo no es suficiente para resolver cierto tipo de situaciones.

Las tareas como la presentada en esta pregunta, deben ser mediadas por el profesor y realizadas por el estudiante, desarrollando así la habilidad de argumentar y comunicar.

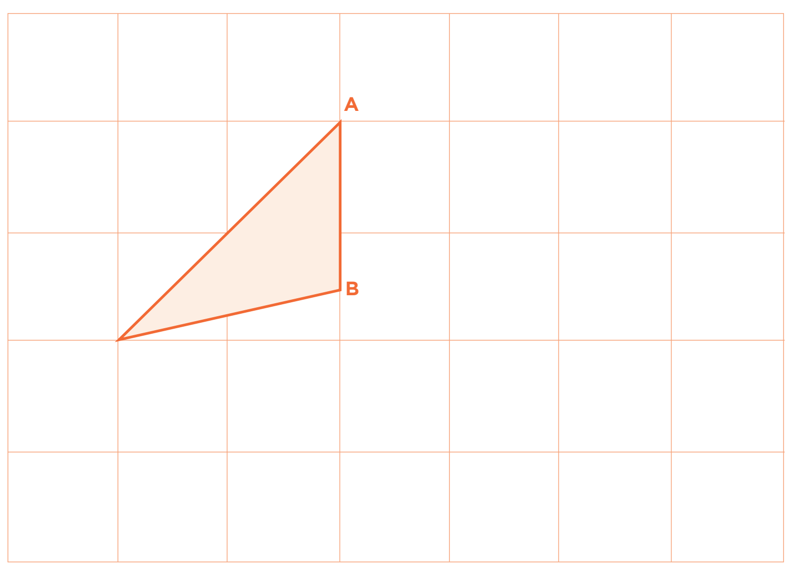
Es muy importante reflexionar sobre el uso de dibujos, diagramas y figuras como referentes en el trabajo geométrico. Es necesario que los estudiantes comprendan la utilidad y limitaciones de estos a la hora de resolver problemas, específicamente, que no se debe asumir a partir de conclusiones visuales medidas de líneas o ángulos que no están explícitos.

3.4.2. EJEMPLO 10: Dibuja con AB como eje de simetría

Clasificación de la pregunta en el Marco de Evaluación de TIMSS	
Dominio de contenido	Geometría
Área del tema	Localización y movimiento
Dominio cognitivo	Aplicación

Enunciado

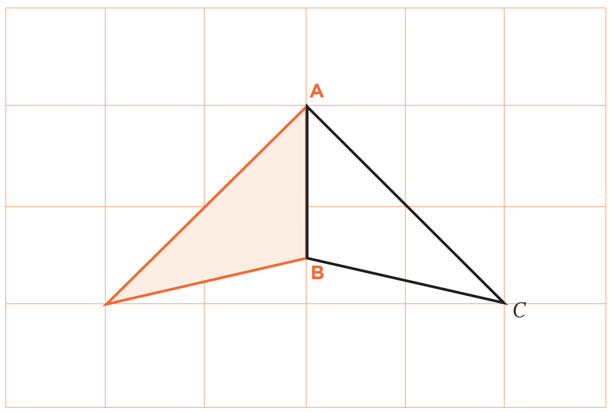
Dibuja el resto de la figura de manera que *AB* sea el eje de simetría.



Pauta de evaluación TIMSS

Respuesta correcta

Reflejo correcto en *AB*



Nota: El punto C debe estar a no más de 2 mm de la intersección correcta sobre la grilla.

Respuesta incorrecta

Incorrectas (incluyendo respuestas tachadas, borradas, marcas desordenadas, ilegibles o no relacionadas con la tarea)

Sin respuesta

En blanco

Estadísticas de respuestas

	Chile (%)	Promedio países participantes TIMSS (%)
Respuestas correctas	42	51
Respuestas omitidas	35	18
Respuestas incorrectas	23	31
Total	**100**	**100**

Equivocaciones frecuentes			
Categoría	**Descripción**	**Cantidad de respuestas**	**Porcentaje del total de respuestas incorrectas[12]**
Equivocaciones de origen conceptual / Error de interpretación	Confunde eje de simetría.	96	52
	Confunde con otra transformación isométrica.	27	15
Otros errores	Distancia del punto homólogo <, > a 2mm.	62	34

Descripción y ejemplos de las equivocaciones encontradas

EQUIVOCACIÓN DE ORIGEN CONCEPTUAL / ERROR DE INTERPRETACIÓN:

El 67% de las respuestas incorrectas demuestra confusión en el eje de simetría o en el tipo de transformación isométrica planteados en la instrucción. No es posible determinar con exactitud si estas equivocaciones se deben a falta de conocimiento conceptual o a problemas de interpretación (lectura de instrucciones). Así, algunos estudiantes consideraron un eje de simetría distinto al eje indicado en la figura, dibujando correctamente la figura respecto a este. Otros estudiantes realizaron una rotación o una traslación. Esto puede deberse a que los ejes de simetría de una figura de dos dimensiones son trabajados principalmente en 4° básico, mientras que la reflexión en un eje diferente a una parte de la figura, la rotación y la traslación, se abordan principalmente en 8° básico. Lo anterior hace que el estudiante esté más familiarizado con estos movimientos en el plano, pero que no tenga la madurez del conocimiento para diferenciarlos.

12 Debido a las aproximaciones, es posible que los porcentajes no sumen 100.

- **Ejemplos de respuestas de estudiantes de Chile**

Figura 1:
El estudiante considera, según su criterio, un eje de simetría distinto al planteado, realizando una correcta simetría axial respecto al mismo e indicando rigurosamente los puntos homólogos.

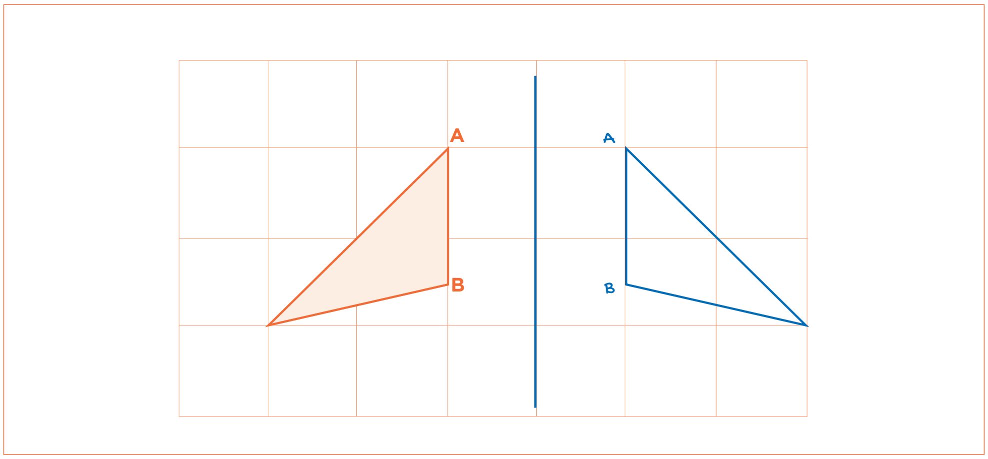
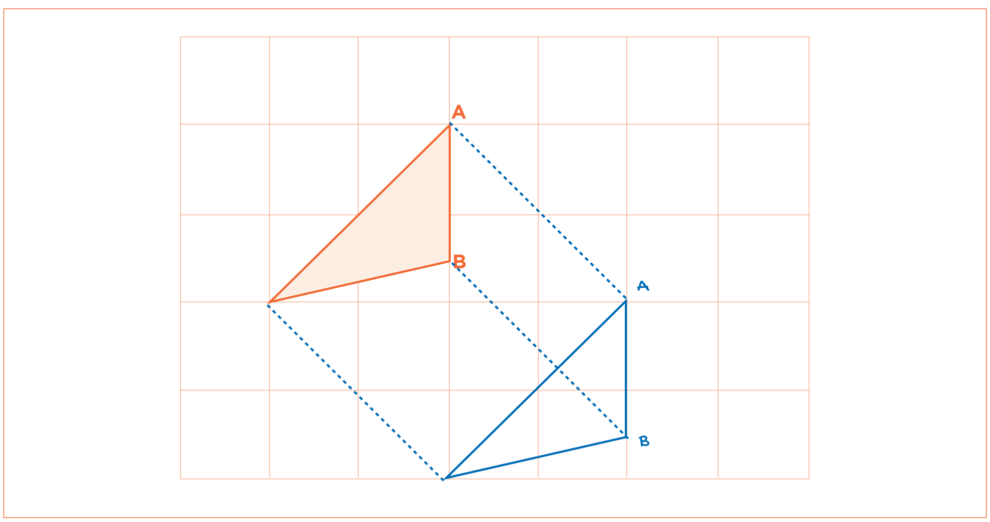


Figura 2:
El estudiante dibuja una traslación de la figura involucrada por medio de un vector elegido a su criterio.



- **Orientaciones a los docentes**

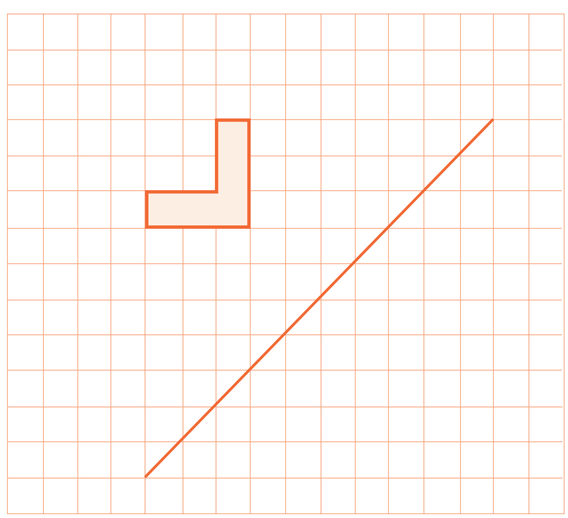
Las confusiones de los estudiantes pueden deberse a falta de conocimientos o a problemas de comprensión lectora. En el ejemplo, es posible pensar que el estudiante confundió la reflexión con la traslación. También puede ocurrir que, para cierto tipo de ejercicios, los alumnos estén acostumbrados a ciertas pre-imágenes. Posiblemente, están familiarizados a repetir los ejercicios que realizan frecuentemente. Por ello, es importante que los ejercicios que se trabajen en clases desafíen a los estudiantes con enfoques y tareas diversas. Por ejemplo, para ejercitar este tipo de contenidos, una posibilidad diferente es entregar la pre-imagen y la imagen pidiendo a los estudiantes que busquen el eje de simetría.

3.4.3. EJEMPLO 11: Dibujar el reflejo del objeto sombreado sobre la línea

Clasificación de la pregunta en el Marco de Evaluación de TIMSS	
Dominio de contenido	Geometría
Área del tema	Localización y movimiento
Dominio cognitivo	Aplicación

Enunciado

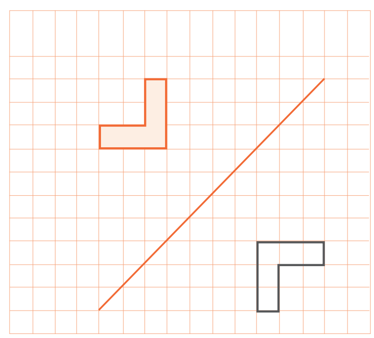
Dibuja el reflejo del objeto sombreado sobre la línea.



Pauta de evaluación TIMSS

Respuesta correcta

Dibuja el objeto sombreado reflejado sobre la línea.



Respuesta incorrecta

Incorrecto (incluye tachaduras, borrones, marcas confusas, ilegibles o ajenas a la tarea)

Sin respuesta

En blanco

Estadísticas de respuestas

	Chile (%)	Promedio países participantes TIMSS (%)
Respuestas correctas	31	43
Respuestas omitidas	17	10
Respuestas incorrectas	52	47
Total	**100**	**100**

Equivocaciones frecuentes

Categoría	Descripción	Cantidad de respuestas	Porcentaje del total de respuestas incorrectas[13]
Equivocación de origen conceptual / Error de interpretación	Realiza otra transformación isométrica.	285	77
	Confunde eje de simetría.	43	12
	Otras respuestas.	43	12

Descripción y ejemplos de las equivocaciones encontradas

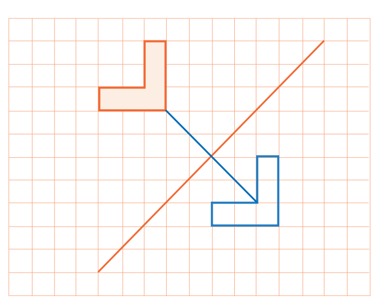
EQUIVOCACIONES DE ORIGEN CONCEPTUAL / ERROR DE INTERPRETACIÓN:

El conocimiento de la reflexión de figuras planas vincula conocimientos sobre congruencia, rectas y visualización espacial. En esta pregunta, el 89% de las respuestas incorrectas corresponde a casos en los que se realizó una transformación isométrica diferente a la solicitada, o con una reflexión con un eje de simetría distinto al señalado. Estas equivocaciones pueden deberse tanto a confusiones conceptuales como a la falta de comprensión lectora.

- **Ejemplos de respuestas de estudiantes de Chile**

Figura 1:

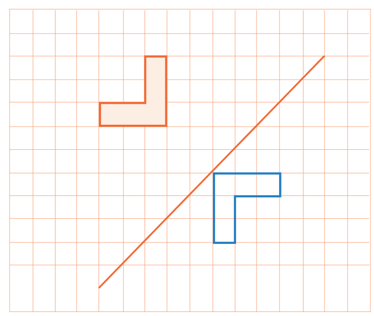
El estudiante dibuja una traslación haciendo coincidir dos puntos no homólogos del objeto.



13 Debido a las aproximaciones, es posible que los porcentajes no sumen 100.

Figura 2:

El estudiante dibuja un objeto simétrico, pero considerando otro eje de simetría.



- **Orientaciones a los docentes**

Tal como se mencionó, una explicación posible para las respuestas mostradas en los ejemplos es que los estudiantes responden sin leer detalladamente las instrucciones. Esto podría deberse a que en las evaluaciones a las que están habituados, no es necesario leer los enunciados, por lo que desarrollan los ejercicios mecánicamente, sin reflexionar al respecto.

Dado lo anterior, se sugiere que los ejercicios indiquen distintos ejes de simetría para la reflexión de una misma figura. También realizar ejercicios donde se entregue la pre-imagen y la imagen, para que los estudiantes busquen el eje de simetría. Por último, predecir la localización de la imagen a partir del eje de simetría, y solicitar la argumentación de la predicción. Esto permitirá reflexionar acerca de su tarea.

Por otra parte, la evidencia muestra que las reflexiones con ejes de simetría diagonales son más desafiantes para los estudiantes. Una posible explicación para esto, es que están más acostumbrados a trabajar con ejes horizontales y verticales donde cuentan el número de cuadrados en sentido horizontal o vertical para identificar los puntos reflejados. Además, en la cotidianeidad abundan los ejes horizontales y verticales.

Esta equivocación deja ver que los estudiantes no tienen claro que cada punto de la forma reflejada debe tener la misma distancia perpendicular desde la línea de simetría. En consecuencia, se sugiere trabajar con ellos las transformaciones isométricas con ejes diagonales, partiendo desde ejemplos simples y concretos. Una posibilidad, es considerar las siguientes preguntas: ¿son las diagonales del cuadrado un eje de simetría? ¿Son ejes de simetría las diagonales del rectángulo? Este trabajo puede ser realizado con material concreto para, posteriormente, dibujarlo en un plano cartesiano.

3.4.4. **EJEMPLO 12:** Mostrar a Carina cómo encontrar el área de una forma irregular

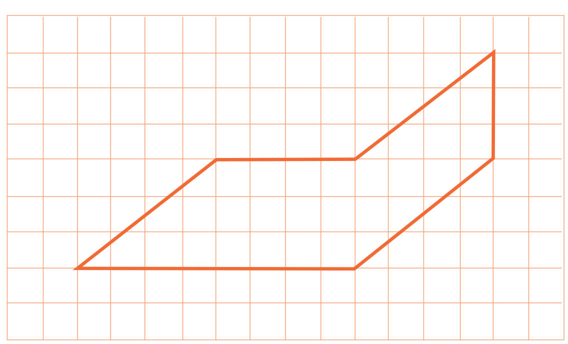
Clasificación de la pregunta en el Marco de Evaluación de TIMSS	
Dominio de contenido	Geometría
Área del tema	Medición geométrica
Dominio cognitivo	Aplicación

Enunciado

Carina está en cuarto año y conoce la fórmula para encontrar el área de un rectángulo, pero no conoce otras fórmulas de área.

Muestra a Carina cómo puede usar la fórmula del área de un rectángulo para encontrar el área de la figura de abajo.

Puedes marcar la figura para ayudarte en la explicación.



Pauta de evaluación TIMSS

Respuesta correcta

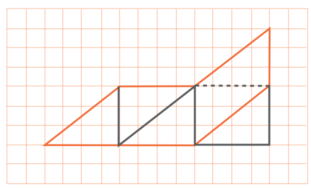
Muestra cómo se puede redistribuir la figura en uno o más rectángulos

O

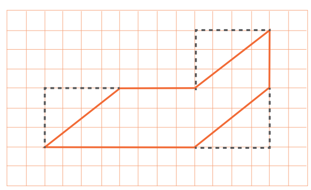
Muestra cómo se puede redistribuir la figura en rectángulos Y muestra que un triángulo es la mitad de un rectángulo.

Ejemplos:

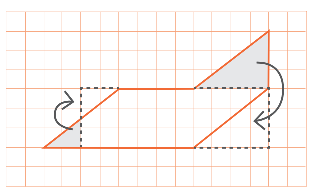
• *Con una explicación:*



• *Con una explicación:*



• *Sin una explicación:*



Respuesta parcialmente correcta

Muestra cómo se puede dividir o distribuir la figura en rectángulo y triángulos, pero no muestra cómo encontrar el área usando rectángulos.

O

Muestra que el triángulo es la mitad del rectángulo, pero no el paralelogramo.

Respuesta incorrecta

Incorrecto (incluye tachaduras, borrones, marcas confusas, ilegibles o ajenas a la tarea)

Sin respuesta

En blanco

Estadísticas de respuestas	Chile (%)	Promedio países participantes TIMSS (%)
Respuestas con puntaje total (2 puntos)	1	8
Respuestas con puntaje parcial (1 punto)	2	9
Respuestas omitidas	58	327
Respuestas incorrectas	39	51
Total	**100**	**100**

Equivocaciones frecuentes

Categoría	Descripción	Cantidad de respuestas	Porcentaje del total de respuestas incorrectas[14]
Equivocaciones de origen conceptual	Confusión de figuras geométricas.	28	9
	Error en el cálculo de área.	253	78
Dificultad argumentativa	Divide la figura utilizando triángulos y rectángulos, pero no explica cómo calcular el área.	31	9
	Otros errores	15	5

Descripción y ejemplos de las equivocaciones encontradas

EQUIVOCACIONES DE ORIGEN CONCEPTUAL:

Las respuestas de los estudiantes a esta pregunta muestran que existe en ellos confusión al distinguir figuras geométricas. Varios estudiantes confunden al romboide que se forma en el lado derecho de la figura con un rectángulo.

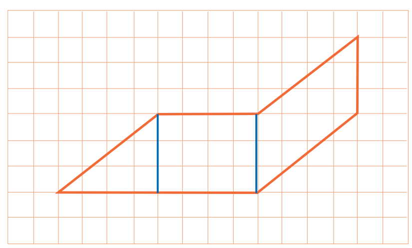
14 Debido a las aproximaciones, es posible que los porcentajes no sumen 100.

Una segunda equivocación conceptual observada, es la utilización de fórmulas incorrectas para calcular el área de un rectángulo, algunas de ellas provenientes del cálculo de área de otras figuras geométricas. Los ejemplos a continuación muestran evidencia de estas confusiones.

- **Ejemplos de respuestas de estudiantes de Chile**

Figura 1:

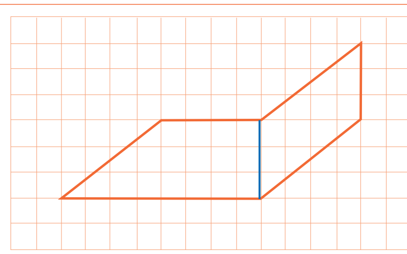
El estudiante se refiere al romboide como un rectángulo.



Puede calcular el área de los 2 rectángulos que se encuentran, aparte de un triángulo

Figura 2:

El estudiante indica que el cálculo del área de un rectángulo se obtiene multiplicando, posiblemente, un alto y un largo por 3,14 (posiblemente π).



$A_{\square} = 3{,}14 \cdot A \cdot b$

$A_{\square} = 3{,}14 \cdot 4 \cdot 4$

$A_{\square} = 12{,}56 \cdot 4$

$A_{\square} = 50{,}24$

- **Orientaciones a los docentes**

A pesar de que los contenidos de formas geométricas son incluidos desde temprana edad, el aumento en su complejidad a lo largo de la etapa escolar los mantiene como un conocimiento complejo de asimilar para los estudiantes. Una posible explicación para las confusiones observadas es que los alumnos están acostumbrados a concebirlas como objetos separados, lo que dificulta su relación y diferenciación (Orton & Frobisher, 2005).

Dentro de figuras geométricas, la pregunta analizado trata sobre el concepto de área, enseñado frecuentemente como la multiplicación "de dos líneas", lo que complejiza su comprensión. Para evitar esto es necesario trabajar desde una comprensión conceptual del área en lugar de recurrir únicamente al conocimiento procedimental. Se sugiere que, al tratar el concepto de área, se considere tanto el conocimiento concreto como abstracto y se incentive a los alumnos a desarrollar "la fórmula" como un ejercicio de modelación. También es útil crear situaciones de enseñanza donde las definiciones de los conceptos geométricos sean elaboradas por los mismos estudiantes desde la diferenciación de sus propiedades.

ERROR DE ARGUMENTACIÓN:

Los estudiantes tuvieron dificultades para explicar cómo se puede calcular el área de una figura irregular. La tarea requiere conocimiento sobre el cálculo del área de rectángulos y de triángulos, además de la capacidad de aplicar este conocimiento a una situación específica. Dicha habilidad resulta desafiante para los estudiantes, probablemente, debido a que no se exponen frecuentemente a este tipo de tareas.

- **Ejemplos de respuestas de estudiantes de Chile**

Figura 1:

El estudiante hace una separación adecuada de la figura para poder realizar el cálculo pertinente, pero no explica cómo realizar el cálculo.

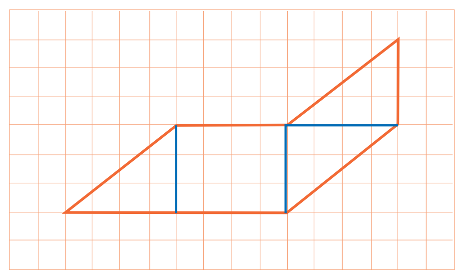
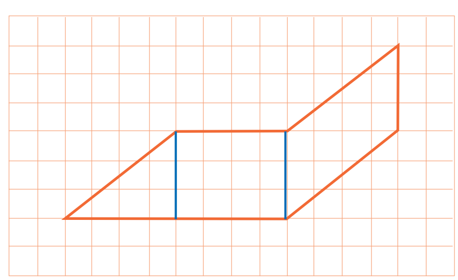


Figura 2:

El estudiante explica que hay que separar las áreas, calcularlas y, posteriormente, realizar una suma. Sin embargo, no indica cómo se realizan esos cálculos.



Para sacar el área de esa figura es mejor partirla en tres partes y sacar el área de cada una y sumar todas las áreas al cuadrado.

- **Orientaciones a los docentes**

Argumentar es una actividad intelectual y social con la que se puede justificar o refutar una opinión, y que consiste en hacer declaraciones teniendo en cuenta el receptor y la finalidad con la que se emiten (Sardà, 2003). Las capacidades de describir, narrar, explicar y justificar son habilidades cognitivo-lingüísticas esenciales para argumentar en cualquier área del conocimiento. Explicar conlleva un nivel de complejidad mayor que el requerido al describir y narrar, por lo tanto, es importante guiar el trabajo que desarrollan los estudiantes.

Se sugiere que se incentive regularmente a los estudiantes a expresar sus ideas y dar fundamentos. Es útil acostumbrarlos a expresar en grupos o en plenario sus ideas matemáticas de manera lógica, distinguiendo los procesos deductivos e inductivos. También es provechoso favorecer momentos de la clase en que los alumnos usen argumentos, incluyendo el lenguaje lógico apropiado con cuantificadores y conectivos. No olvidar que los protagonistas de la clase deben ser los estudiantes, por ello es importante incluir actividades en las que ellos puedan formular y validar sus propios argumentos.

3.5. DOMINIO DE CONTENIDO: DATOS Y AZAR

3.5.1. EJEMPLO 13: Completar un gráfico de barra

Clasificación de la pregunta en el Marco de Evaluación de TIMSS	
Dominio de contenido	Datos y azar
Área del tema	Interpretación de datos
Dominio cognitivo	Aplicación

Enunciado

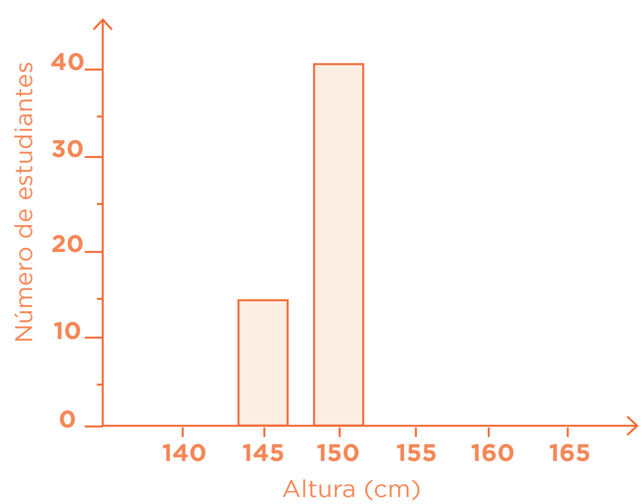
Se midió la altura de 100 estudiantes de un colegio aproximándolas al múltiplo de 5 cm más cercano.

La siguiente tabla muestra los resultados.

Altura (cm)	145	150	155	160
Número	16	40	25	19

Completa el gráfico de barras para mostrar la misma información.

Altura de los estudiantes



Pauta de evaluación TIMSS
Respuesta correcta
Barra para 155 entre 24 y 26 (excluyéndolos), barra para 160 entre 17,5 y 20 (excluyéndolos) y ninguna otra barra dibujada.
Respuesta incorrecta
Solo una barra correcta.
Otras incorrectas (incluidas respuestas tachadas, borradas, marcas desordenadas, ilegibles o no relacionadas con la tarea)
Sin respuesta
En blanco

Estadísticas de respuestas

	Chile (%)	Promedio países participantes TIMSS (%)
Respuestas correctas	56	64
Respuestas omitidas	19	9
Respuestas incorrectas	25	27
Total	**100**	**100**

Equivocaciones frecuentes

Categoría	Descripción	Cantidad de respuestas	Porcentaje del total de respuestas incorrectas[15]
Equivocaciones de origen conceptual	Completa con dos barras en que una o ambas interpolaciones de las frecuencias son incorrectas.	61	53
	Completa con dos barras correctamente, pero no conserva el ancho de la barra o no posiciona correctamente la barra en el eje X.	6	5
	Respuesta ingenua: completa con más de dos barras inventando datos.	49	42

Descripción y ejemplos de las equivocaciones encontradas

EQUIVOCACIONES DE ORIGEN CONCEPTUAL:

La pregunta solicita completar el gráfico de barras, del cual solo se han dibujado dos barras para mostrar los cuatro datos dados mediante una tabla. De esta manera, el estudiante debe construir dos barras que contengan a los puntos (155,25) y (160,19), y conservar las dimensiones de las barras dadas (con un ancho similar y uniforme).

Un gráfico de barras como el propuesto en la pregunta involucra una red de conceptos integrados:

- verbales: la lectura de la tabla, de sus encabezados laterales, del título y rótulos de los ejes (y su unidad de medida);
- numéricos: las escalas de los ejes (la variable discreta y la variable discretizada);
- de orden de los números naturales, unidad de las escalas graduadas, eje con cero, obtención de valores por interpolación;

15 Debido a las aproximaciones, es posible que los porcentajes no sumen 100.

- geométricos: perpendicularidad, paralelismo, plano cartesiano, coordenadas, altura, segmentos, ancho y largo de rectángulos;
- gráficos y tabulares: la tabla de datos, gráfico de barras, frecuencias, variable discreta y construcción de barras en el eje de la variable discretizada, barras de ancho y espaciado uniforme entre ellas.

Considerar la variedad de conceptos integrados en la tarea permite establecer posibles explicaciones para las respuestas incorrectas observadas. El 53% de las equivocaciones corresponde a estudiantes que no dibujaron barras de acuerdo a las medidas señaladas, errando en la interpolación de las escalas. El 42% dibujó barras con datos muy alejados de lo pedido en la tarea (de donde se infiere que son datos "inventados"). Es importante notar que el 5% de los estudiantes logra establecer las medidas correctas de las barras, pero no respeta el ancho o posición de estas (no deja espacio entre ellas).

- **Ejemplos de respuestas de estudiantes de Chile**

Figura 1:

El estudiante completa con barras de altura correcta, pero muy angostas.

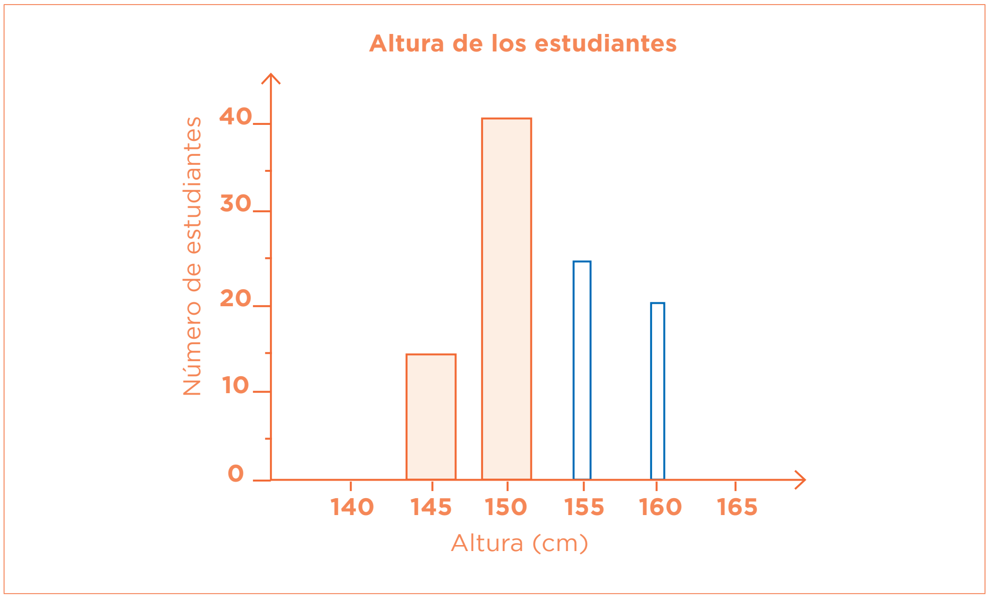
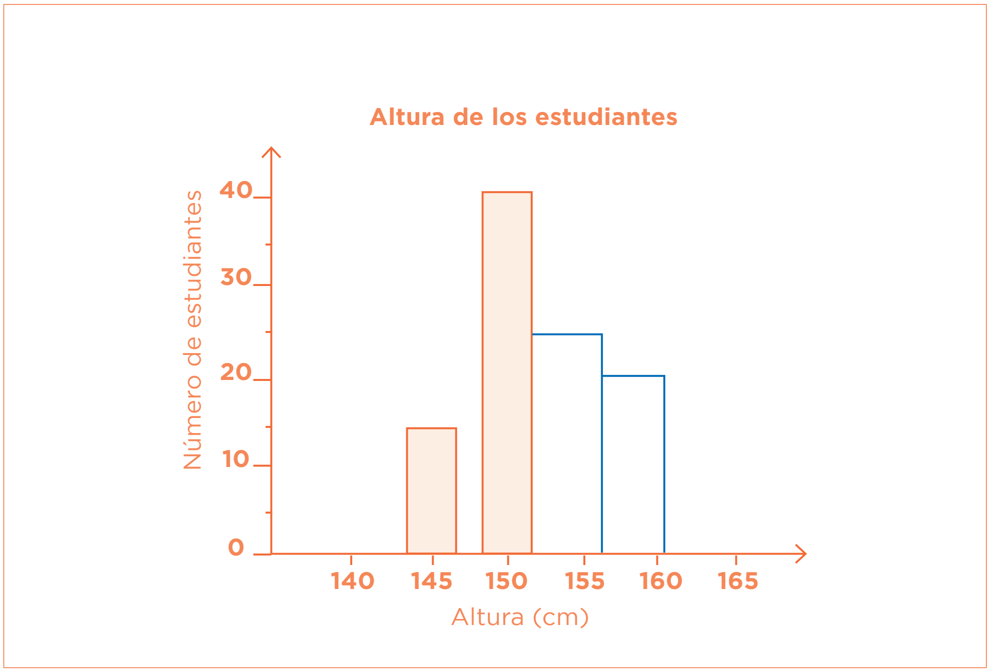


Figura 2:

En esta respuesta el estudiante coloca las barras sin espacio entre ellas.



- **Orientaciones a los docentes**

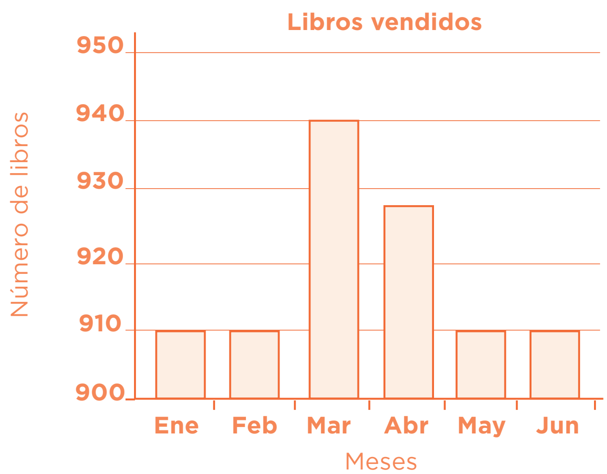
Estrella (2010) destaca la complejidad de este tipo de preguntas ya que involucran diversas tareas: leer desde una tabla simple, leer un gráfico de barras verticales, relacionar los valores de la tabla simple con un par ordenado en el plano cartesiano y dibujar una barra paralela al eje vertical. Es decir, se deben comparar los datos de la tabla con las barras del gráfico, transformar datos cuantitativos a longitud y ancho de barra e interpretar longitud de barra con datos cuantitativos de cada categoría de la variable. Al comprender solo algunas tareas y procesos, los estudiantes no logran obtener el puntaje completo.

Se sugiere proporcionar a los estudiantes situaciones de construcción de gráficos que vayan más allá de la lectura e interpretación. Por ejemplo, se les puede pedir construir o completar gráficos, considerando la existencia de datos con frecuencia cero. También es útil promover situaciones de construcción de diversas representaciones de datos, por ejemplo, de tabla a gráfico, de gráfico a gráfico, de gráfico a tabla y de lista a tabla, entre otras. Otra posibilidad es proponer situaciones de gráficos de barras simples en que la variable sea discreta o continua y discutir sobre el ancho de la barra y los espacios entre barras que se deben realizar.

3.5.2. EJEMPLO 14: Acuerdo/Desacuerdo con el vendedor

Clasificación de la pregunta en el Marco de Evaluación de TIMSS	
Dominio de contenido	Datos y azar
Área del tema	Interpretación de datos
Dominio cognitivo	Razonamiento

Enunciado



Un vendedor miró el gráfico que mostraba sus ventas de libros en los primeros 6 meses del año 2004 y dijo: "En marzo vendí cuatro veces más libros que en febrero".

Explica si estás de acuerdo o en desacuerdo con el vendedor, y da una razón.

Pauta de evaluación TIMSS

Respuesta correcta

En desacuerdo, con referencia a un falso origen o a que la escala no parte de cero.

Ejemplos:

Estoy en desacuerdo porque la sección del gráfico del número de libros no empieza en cero.

Estoy en desacuerdo con el vendedor. Debería mirar con cuidado el gráfico. El gráfico se hizo usando 900 como base, y no 0.

En Desacuerdo con una explicación en base a la multiplicación o división.

Ejemplos:

Estoy en desacuerdo porque no creo que 940 sea 4 veces más. Creo que si fuera 4 veces más sería 3640.

En desacuerdo. Porque el gráfico muestra que vendió 910 libros en febrero y 940 libros en marzo. 940 no es 4 veces 910.

Estoy en desacuerdo porque si divides el total de marzo por 4 (940:4) obtienes 235, que no es el total de febrero. El total de febrero fue 910.

En desacuerdo, con la explicación de que el incremento no puede ser 4 veces la cantidad de libros.

Ejemplos:

Estoy en desacuerdo porque solo vendió 30 libros más en marzo. De 910 libros pasó a 940.

Respuesta incorrecta

De acuerdo o en desacuerdo, con una explicación en base solo a las alturas relativas de las barras que se muestran.

Ejemplos:

Estoy de acuerdo porque el gráfico muestra que en marzo la barra subió cuatro veces.

Estoy en desacuerdo ya que si miras la barra verás que entre febrero y marzo solo hay tres barras, así que tendría que decir: "En marzo vendí tres veces la cantidad de libros que vendí en febrero".

Otras incorrectas (incluidas respuestas tachadas, borradas, marcas desordenadas, ilegibles o no relacionadas con la tarea) Ejemplos: *Estoy de acuerdo porque en febrero vendió 30 libros menos que en marzo.* *Estoy de acuerdo con el vendedor porque en febrero vendió 910 libros. Esto quiere decir que habría vendido 1820 libros pero solo vendió 940 en marzo.*
Sin respuesta
En blanco

Estadísticas de respuestas

	Chile (%)	Promedio países participantes TIMSS (%)
Respuestas correctas	18	35
Respuestas omitidas	27	18
Respuestas incorrectas	55	47
Total	**100**	**100**

Equivocaciones frecuentes

Categoría	Descripción	Cantidad de respuestas	Porcentaje del total de respuestas incorrectas[16]
Equivocaciones de origen conceptual	Utiliza el argumento gráfico sin referirse a la frecuencia.	142	36
	Utiliza el argumento gráfico y se refiere a la frecuencia	135	35
	Argumento ingenuo de abstracción o asociado a su realidad.	64	16
Dificultades argumentativas	Argumento incompleto con error en operatoria o estimación alejada	50	13

16 Debido a las aproximaciones, es posible que los porcentajes no sumen 100.

Descripción y ejemplos de las equivocaciones encontradas

EQUIVOCACIONES DE ORIGEN CONCEPTUAL:

Los conocimientos previos en juego para resolver esta pregunta son: desde lo icónico, las líneas y barras; desde lo verbal, la lectura de título y rótulos de los ejes (incluyendo unidad de medida) del gráfico de barra; desde lo numérico, la escala del eje Y, los números naturales, la unidad de la escala (de intervalo), el orden de los números naturales, el eje sin cero y la adición, la multiplicación y la proporcionalidad; desde lo geométrico, la perpendicularidad, el paralelismo, el plano cartesiano, las coordenadas, la altura, los segmentos, el rectángulo y la unidad de área; desde lo gráfico, el gráfico de barras, la frecuencia y el sistema bidimensional de coordenadas; y desde lo estadístico, la variable discreta y la variable ordinal (meses).

En este caso, la pregunta propone una aseveración errónea de un gráfico de barra, el cual al no estar construido con el cero como origen, genera una percepción visual errada de la relación entre las barras de los meses aludidos. Para resolver esta pregunta, es necesaria una red de conocimiento conceptual, de modo de: (1) reconocer la recta numérica presentada en forma vertical sin cero en el origen; (2) desarrollar la lectura de dos categorías específicas de la variable cualitativa ordinal; y (3) reconocer la altura de la barra como la frecuencia de la categoría (y no la base).

- **Ejemplos de respuestas de estudiantes de Chile**

Figura 1:

El estudiante entrega un argumento gráfico erróneo usando frecuencia absoluta.

Estoy de acuerdo porque vendió 940 libros y en febrero vendió solo 910

Figura 2:

El estudiante entrega un argumento gráfico erróneo usando la moda.

Estoy de acuerdo porque en marzo fue el mes que más vendió sus libros comparado con los otros meses.

Figura 3:

El estudiante entrega un argumento gráfico erróneo confundiendo "veces" por unidades relativas a la frecuencia. Esto es, el significado de "tres veces" es comparado erróneamente con "30 unidades".

No, porque 940 - 910 = 30.
Vendió 3 veces más en febrero.

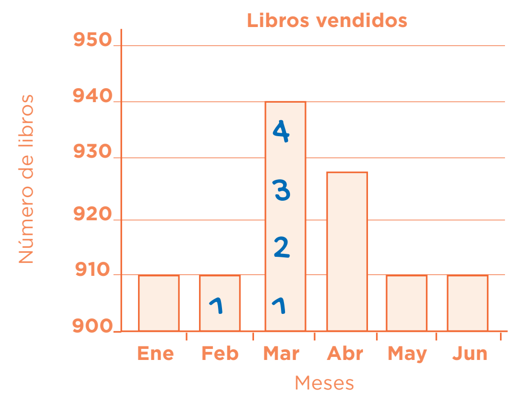
Figura 4:

El estudiante basa su fundamentación en identificar erróneamente "tres veces (para las 30 unidades)" o "cuatro veces (para 40 unidades)", sin enfocarse en las frecuencias dadas sino en la unidad cuadrada de área –barra menor–.

Sí, es verdad. El vendedor vendió cuatro veces más sus libros en el mes de marzo ya que en el gráfico aumenta cuatro veces más

Figura 5:

El estudiante argumenta erróneamente según "tres veces (para las 30 unidades)" o "cuatro veces (40 unidades)" para las dos categorías a comparar, sin enfocarse en las frecuencias dadas sino en la unidad cuadrada de área –barra menor–.



Sí, estoy de acuerdo ya que efectivamente vendió el cuádruple

- **Orientaciones a los docentes**

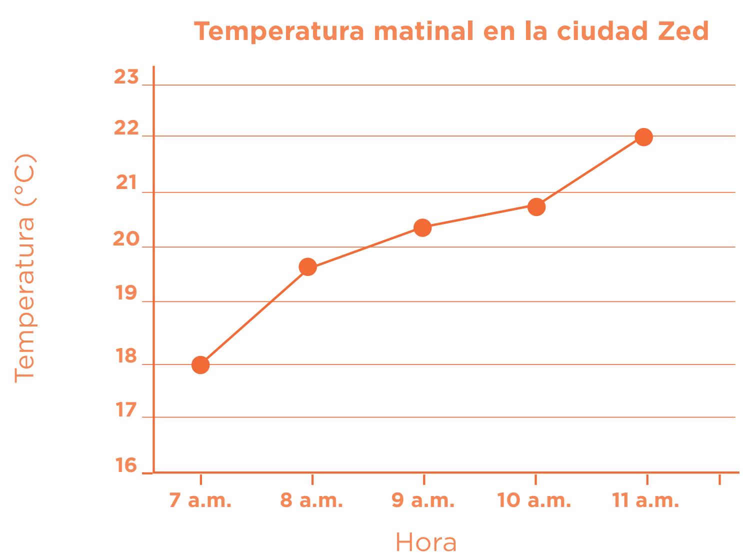
Del Pino & Estrella (2012) señalan la complejidad de la representación de datos estadísticos, dado que es frecuente que los estudiantes vean los gráficos como meras ilustraciones. De hecho, muchos estudiantes creen que el gráfico es más una foto que una representación con escalas (Mooney et al., 2011). Esto deja en evidencia que en las aulas escolares faltan propuestas que enfrenten a los estudiantes a tareas de análisis de datos de alto nivel cognitivo, las que promuevan el análisis crítico y las múltiples representaciones, donde los estudiantes tengan más oportunidades de construir sus propias representaciones de datos, más que trabajar en tablas y gráficos ya hechos (Estrella, 2014).

Se sugiere proporcionar a los estudiantes situaciones de construcción de gráficos que incluyan una lectura crítica y profunda. Por ejemplo, enfrentarse a gráficos sin escala, o sin ejes y con barras porcentuales, o que permitan comparar distintas muestras. También, analizar gráficos que presenten intencionalmente errores visuales, los cuales distorsionen la rápida interpretación. Al momento de analizar estas situaciones, es importante también incentivar a los estudiantes a ejercitar la argumentación tanto oral como escrita.

3.5.3. EJEMPLO 15: Estimar la temperatura

Clasificación de la pregunta en el Marco de Evaluación de TIMSS	
Dominio de contenido	Datos y azar
Área del tema	Interpretación de datos
Dominio cognitivo	Conocimiento

Enunciado



El gráfico muestra las temperaturas de cada hora, desde las 7 a. m. hasta las 11 a. m.

Haz una estimación de la temperatura a las 9:30 a. m.

Respuesta: _______________ °C

Pauta de evaluación TIMSS
Respuesta correcta
20,4 a 20,7 inclusive.
Respuesta incorrecta
Incorrectas (incluidas respuestas tachadas, borradas, marcas desordenadas, ilegibles o no relacionadas con la tarea)
Sin respuesta
En blanco

Estadísticas de respuestas

	Chile (%)	Promedio países participantes TIMSS (%)
Respuestas correctas	37	52
Respuestas omitidas	20	8
Respuestas incorrectas	43	40
Total	**100**	**100**

Equivocaciones frecuentes			
Categoría	Descripción	Cantidad de respuestas	Porcentaje del total de respuestas incorrectas[17]
Equivocaciones de origen conceptual	No interpola en eje X, dando el valor de la ordenada del punto destacado en el gráfico (20,2 o 20,9).	112	51
	Respuestas ingenuas. Cualquier valor fuera del rango de valores dados.	66	30
Error de operatoria	Interpola correctamente, pero calcula erróneamente el número decimal sumando la parte decimal a la parte entera (por ejemplo, 20 + 0,5 = 25; otros, 24, 26, 27, 28).	41	19

Descripción y ejemplos de las equivocaciones encontradas

EQUIVOCACIONES DE ORIGEN CONCEPTUAL:

La pregunta promueve el paso desde lo discreto a lo continuo en un contexto gráfico: las escalas de los ejes se muestran discretas, pero se debe interpolar para estimar, lo que involucra el paso de los números naturales a los decimales, que en este caso se obtienen por estimación.

Los conocimientos previos para realizar el tránsito descrito son: desde lo verbal, la lectura de título y rótulos de los ejes (incluyendo unidades de medida); desde lo numérico, las escalas de los ejes (variables continuas, horas y temperatura en °C), el orden de los números naturales, la unidad (de la escala, la unidad es de intervalo/razón), los ejes sin cero y estimar por interpolación; desde lo geométrico, la perpendicularidad, el paralelismo, el plano cartesiano, los puntos y segmentos y la línea poligonal; y desde lo gráfico, leer la variable continua, el gráfico de línea de variables continuas y la ubicación bidimensional del dato de coordenadas (x,y).

17 Debido a las aproximaciones, es posible que los porcentajes no sumen 100.

- **Ejemplos de respuestas de estudiantes de Chile**

Figura 1:

El estudiante no interpola en eje X (considera la hora 9), dando el valor de la ordenada del punto destacado en el gráfico (20,2).

Respuesta: 20,2 ºC

Figura 2:

El estudiante interpola correctamente, pero calcula erróneamente el número decimal sumando la parte decimal a la parte entera (a) 20 + 0,5 = 25.

Respuesta: 25 ºC

- **Orientaciones a los docentes**

Al realizar la interpolación en el gráfico de líneas, el estudiante debe conectar sus conocimientos del plano cartesiano y las coordenadas de un punto, reconocer y convertir el sistema sexagesimal del tiempo al sistema decimal y tener conocimientos de la escritura de los números decimales.

La interpretación y construcción de gráficos en los que una de las variables es el tiempo se consideran relativamente fácil, debido a que la variación asociada con el tiempo es algo natural y no necesita una atención especial (Leinhardt et al., 1990). Pese a ello, Bell & Janvier (1981) citan un importante estudio sobre lectura de gráficos en secundaria, donde se observa que la interpolación reduce la facilidad de lectura de un gráfico en un 70%, mientras que el uso de decimales la reduce en 30-35%.

Se sugiere realizar ejercicios en clases que contengan situaciones de aprendizaje de equivalencia y/o transformación de horas del sistema sexagesimal a sistema decimal, en contextos cotidianos para los estudiantes. También, integrar la adquisición de comprensión conceptual y procedimental de los números decimales con situaciones de la vida real.

Con posterioridad, es posible conectar las situaciones anteriores con la construcción de gráficos (y no solo lectura o interpretación de ellos). A la vez, complejizar los gráficos de datos convirtiendo los ejes desde valores discretos (naturales y/o enteros) a valores continuos, solicitando a los estudiantes que expliciten la variable en juego y la escala de medida de la variable. Por último, es también positivo incluir situaciones de interpolación de valores en la escala de los ejes, tanto en un solo eje como en los dos ejes.

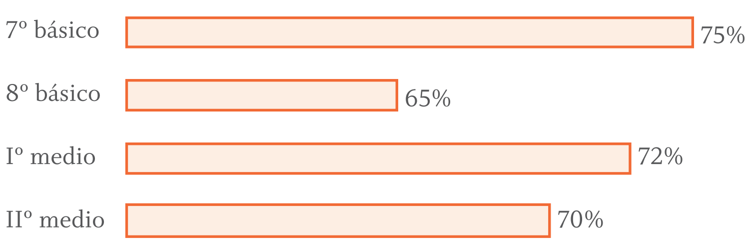
3.5.4. EJEMPLO 16: Error en un gráfico de barras de una encuesta deportiva

Clasificación de la pregunta en el Marco de Evaluación de TIMSS	
Dominio de contenido	Datos y azar
Área del tema	Interpretación de datos
Dominio cognitivo	Razonamiento

Enunciado

Encuesta sobre deportes en el colegio - 7° básico a II° medio

Porcentaje de estudiantes que eligió al fútbol como su deporte favorito:



El colegio de Juan pidió a sus estudiantes de 7° básico a II° medio que eligieran su deporte favorito. Hay 100 estudiantes en cada nivel. El gráfico muestra los resultados de los estudiantes que eligieron fútbol.

Juan comparó los resultados de 7° y 8° básico. Juan pensó que el doble de los estudiantes de 7° básico eligieron fútbol comparado con 8° básico.

Explica cómo el gráfico hizo que Juan cometiera este error.

Pauta de evaluación TIMSS

Pauta de evaluación TIMSS
Respuesta correcta
La barra de 7° básico es el doble más larga que la de 8° básico o equivalente O El origen no está en 0 O El gráfico no está dibujado a escala.
Respuesta incorrecta
Explicación incorrecta o inadecuada (incluidas respuestas tachadas, borradas, marcas desordenadas, ilegibles o no relacionadas con la tarea)
Sin respuesta
En blanco

Estadísticas de respuestas

	Chile (%)	Promedio países participantes TIMSS (%)
Respuestas correctas	21	27
Respuestas omitidas	50	29
Respuestas incorrectas	29	44
Total	**100**	**100**

Equivocaciones frecuentes			
Categoría	**Descripción**	**Cantidad de respuestas**	**Porcentaje del total de respuestas incorrectas[18]**
Dificultades argumentativas / Equivocaciones de origen conceptual	Argumentación insuficiente con palabras, dibujos, gráficos o números.	114	31
	Argumentos escritos con números o estimaciones erróneas.	16	9
	Argumentos sin sentido.	99	58
	Cálculos o gráficos sin sentido.	16	9

Descripción y ejemplos de las equivocaciones encontradas

EQUIVOCACIONES DE ORIGEN CONCEPTUAL:

La pregunta se encuentra en un contexto de análisis evaluativo de un gráfico de barras horizontales, el cual está construido erróneamente. Los estudiantes deben comparar visualmente largos de barra (mitad o doble), asociarlas a la afirmación de error que entrega el enunciado y considerar el porcentaje explícitamente indicado en cada barra.

En particular, la comparación visual de la longitud de las barras y el porcentaje respectivo indican en la imagen el error de una de las barras. La comparación numérica de los porcentajes desde una escala que parte de un valor cero implícito indica que un porcentaje es erróneo y, por tanto, la afirmación también. Las respuestas de los estudiantes muestran dificultades en la construcción escrita de estos argumentos lógicos del error, los cuales integran la comparación visual-numérica (longitud y porcentaje).

Los conocimientos previos necesarios son: desde lo verbal, la lectura del título, rótulos de los ejes del gráfico de barra (incluyendo su unidad de medida) y las

18 Debido a las aproximaciones, es posible que los porcentajes no sumen 100.

categorías de la variable ordinal; desde lo numérico, los porcentajes, orden de los números naturales, parte-todo y doble-mitad; desde lo geométrico, paralelismo, plano cartesiano implícito, rectángulo y longitud de rectángulo; y desde lo gráfico, barras porcentuales, comparación visual de longitudes de barras, gráfico de barras horizontales, variable cualitativa ordinal y variable cuantitativa de intervalo.

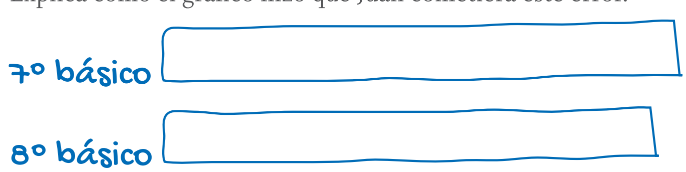
Dado que para lograr una argumentación adecuada los estudiantes requieren poseer estos conocimientos, no es posible en este caso distinguir certeramente las equivocaciones que tienen un origen conceptual de las dificultades argumentativas.

- **Ejemplos de respuestas de estudiantes de Chile**

Figura 1:

Los estudiantes argumentan con dibujos o gráficos, pero no logra justificar adecuadamente.

Explica cómo el gráfico hizo que Juan cometiera este error.



Explica cómo el gráfico hizo que Juan cometiera este error.

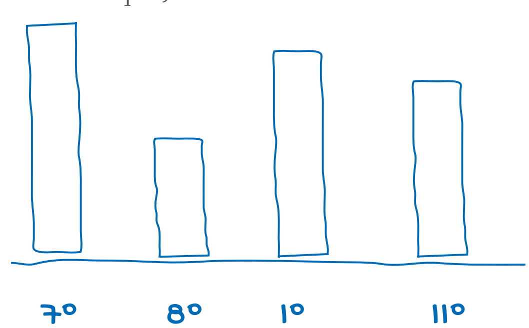


Figura 2:

Los estudiantes argumentan con números o estimaciones erróneas.

Explica cómo el gráfico hizo que Juan cometiera este error.

Lo que hizo que Juan cometiera el error fue que la barra de 8° básico tiene harta diferencia de altura con la de 7° básico sin embargo es solo el 25% de diferencia.

Figura 3:

Los estudiantes argumentan con números o estimaciones erróneas.

Explica cómo el gráfico hizo que Juan cometiera este error.

El gráfico se equivocó en los 8° Básico, porque era la mitad, tendría que haber sido 33,5

- **Orientaciones a los docentes**

Diversas dificultades surgen en la lectura de gráficos. Dentro de estas, el análisis de un gráfico de barras construido con errores es de las más complejas pues considera: comprensión del contexto, evaluación de la fiabilidad de la información y el cuestionamiento del mismo. Las respuestas incorrectas analizadas dejan ver que frecuentemente los estudiantes no pueden leer los valores o tendencias en los gráficos, establecen valores incorrectos en la lectura del gráfico o no relacionan las diversas características extraídas del gráfico con el contexto.

Se recomienda utilizar ejercicios que proporcionen situaciones de construcción de gráficos con lectura crítica, es decir, que incluyan la comprensión del contexto, la evaluación de la fiabilidad de la información y el cuestionamiento del mismo. Una posibilidad es utilizar gráficos sin escala, sin ejes, con barras porcentuales y/o que permitan comparar distintas muestras. También es recomendable utilizar gráficos que presenten errores visuales, de modo tal que distorsionen la fácil interpretación. Por último, se recomienda solicitar a los estudiantes que argumenten por escrito sus resultados para que desarrollen esta habilidad.

CONCLUSIONES

4. Conclusiones y recomendaciones

Lucchini, Cuadrado y Tapia (2006) plantean que las equivocaciones que tienen un origen didáctico pueden deberse a diferentes causas que afectan la manera en cómo la información es recibida y procesada por los estudiantes. En primer lugar, estos problemas pueden ser de origen afectivo, por ejemplo, amedrentamiento, motivaciones y estímulos desalineados con los intereses o la etapa del desarrollo de los estudiantes. En segundo lugar, los problemas pueden ser de índole conceptual, por ejemplo, no considerar las condiciones necesarias para asimilar nuevos conceptos o habilidades. Por último, estos pueden ser de naturaleza formal cuando existen contradicciones en la información entregada por diversos docentes, o entre docentes y padres.

Por otra parte, existe consenso general en la literatura de que entre todos los factores internos que inciden en el aprendizaje de los estudiantes, el más importante es el profesor (Hargreaves y Fullan, 2014). Considerando estos dos elementos, el presente documento busca contribuir al rol del docente poniendo a su disposición un material pedagógico que facilite la resolución de dudas o confusiones entre los estudiantes. Junto a ello, busca contribuir a instancias de reflexión de los docentes sobre las prácticas en las salas de clases y, de esta manera, promover y desarrollar el conocimiento especializado para la enseñanza de la Matemática.

Los errores analizados en este documento comparten un aspecto común: débil desarrollo del pensamiento matemático en el aula. En base a esto, se presentan a continuación algunas recomendaciones generales:

1. Es fundamental que el docente reflexione sobre los elementos cognitivos que conciernen su quehacer profesional. Es necesario que se indague en diversas definiciones de un concepto matemático, y que estas se analicen para saber

qué tienen en común y en qué se contradicen.
Posterior a ello, es fundamental que el docente busque o cree situaciones de enseñanza que propicien el aprendizaje. A modo de ejemplo, indicar que "al multiplicar cruzados numeradores y denominadores de las fracciones se podrá determinar cuál es mayor" no es una situación que favorezca el aprendizaje matemático. Este tipo de metodologías incentivan aprendizajes memorísticos en desmedro de la capacidad de razonamiento y análisis. En la misma línea, la estructura: definición, ejemplo y ejercicio tampoco promueve el aprendizaje matemático; solo busca que un estudiante sepa seguir ciertas instrucciones. En la clase de Matemática los alumnos deben indagar, equivocarse, formular ideas y validarlas para luego internalizarlas. En estas instancias los estudiantes deben ser los protagonistas.

2. De esta manera, la clase de Matemática es una instancia para que el docente facilite el desarrollo de las habilidades por parte de los estudiantes. Para efectos del aprendizaje y motivación de los estudiantes, no es lo mismo pedirles que descubran el área de la superficie de un triángulo que indicarles cómo se debe calcular el área de la superficie de un triángulo. La creación de una situación de enseñanza, en la que el estudiante descubra el área de la superficie de un triángulo, depende del conocimiento profesional del profesor. Por medio de actividades centradas en la representación y la modelación, los estudiantes podrían llegar a concluir que el área de un triángulo es la mitad de la base del triángulo por la altura de este. Entre los didactas de la Matemática las situaciones fundamentales de Brousseau son bastante conocidas. Sin embargo, su ejecución depende de la gestión del aula, del grupo de estudiantes, de las situaciones de contingencia y del contexto de enseñanza, entre otros.

3. La resolución de problemas debe ser el eje central de las clases de Matemática. Al resolver problemas los estudiantes argumentan, ocupan diversos registros de representación e indagan en posibles respuestas. Es por ello que se debe dar suficiente tiempo en clases para que el alumno piense por sí mismo y haga una representación personal de los problemas, tal como lo ejemplifica el enfoque abierto de resolución de problemas.

4. Es importante retomar los conocimientos previos de los estudiantes por medio de las trayectorias de aprendizaje. Por ejemplo, si se trabajan las ecuaciones en quinto básico, es necesario que se retomen ejemplos de familias de operaciones de primero o segundo año, para que el estudiante conecte sus conocimientos y forme una trayectoria coherente en sus aprendizajes. Los aprendizajes no deben ser aislados. No podemos tratar el contenido de los ángulos formados por una transversal que corta dos rectas paralelas y no relacionarlo con los paralelogramos, por ejemplo.

5. El eje de geometría debe ser descubierto poco a poco por medio de la observación. Lo ideal no es definir y ejemplificar, sino clasificar a partir de la caracterización concreta, donde el profesor o profesora actúa como guía para que el estudiante logre la definición. El material concreto es fundamental. Antes de conocer la definición de un rombo, el estudiante debe "tocarlo" (es figura no cuerpo, pero si se corta en un papel lustre, uno de los colores puede representar a la figura), doblarlo y apreciarlo. Los recursos de aprendizaje deben tener sintonía con los objetivos de aprendizaje desarrollados en el currículo.

6. La habilidad de organizar y analizar información es fundamental para formar ciudadanos críticos que puedan aportar a su comunidad para trabajar por una sociedad más justa. Por ello, es recomendable que los docentes trabajen con gráficos obtenidos de la prensa, libros o redes sociales, para promover la reflexión entre los estudiantes sobre la información entregada.

7. Crear situaciones donde los estudiantes deban leer y comprender qué tarea se les está solicitando, es necesario para mejorar la interpretación de las preguntas. Se recomienda trabajar, permanentemente, con los alumnos en

la comprensión de la situación problemática. Para ello, es útil analizar el enunciado y la pregunta guiando a los alumnos en la interpretación de qué es lo que se está pidiendo y cuál es la función de los datos presentados. Del mismo modo, es aconsejable que los estudiantes trabajen con un amplio abanico de preguntas, involucrando distintos procesos metacognitivos. Por ejemplo, la reflexión no debe restringirse a ejes de simetría verticales y horizontales, o que correspondan a la recta $y=x$.

8. En la enseñanza del álgebra es positivo que los estudiantes utilicen símbolos para representar variables y describir las distintas relaciones que se establecen entre ellas. Los docentes deben resguardar que los estudiantes sean conscientes de los distintos usos que se les da a los símbolos, de acuerdo al contexto. Un ejemplo de ello, es el uso de símbolos en el contexto de generalización de una secuencia numérica, en que es necesario que los estudiantes perciban un patrón que la define.

9. Las respuestas a las preguntas abiertas de TIMSS muestran bajo nivel de dominio en el uso de los números naturales y racionales, tanto en su expresión decimal como fraccionaria. Gran parte de los estudiantes se equivoca en situaciones de aproximación y cálculo con naturales, en situaciones de comparación y conversión de escritura decimal y fraccionaria, en situaciones de modelación de relaciones proporcionales y porcentajes, y en la resolución de problemas de proporciones. El análisis de las respuestas de alumnos permitió constatar que en gran medida las equivocaciones se originan por una falta de conexión entre los conceptos y los procedimientos numéricos. A raíz de ello, se recomienda a los docentes favorecer la integración de los procedimientos con los conceptos de números, dado que allí se identifica el origen de la mayor parte de los errores.

LISTA DE REFERENCIAS

Lista de referencias

- Abrate, S., Pochulu, M., & Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.

- Grupo Azarquiel. (1991). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.

- Bell, A., & Janvier, C. (1981). *The interpretation of graphs representing situations. For the learning of mathematics, 2*(1), 34-42.

- Brousseau, G. (1976). *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques* [Los obstáculos epistemológicos y los problemas en Matemática]. En Vanhamme, W., & Vanhamme, J., *La problématique et l'enseignement de la mathématique*, Louvain-la-neuve, pp.101-117

- Brousseau, G., Davis, R. & Werner, T. (1986). *Observing students at work*, en Christiansen B., Howson, G. & Otte, M. (Eds.): *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht: Reidel Publishing comp.

- Del Pino, G., & Estrella, S. (2012). *Educación estadística: relaciones con la matemática. Pensamiento Educativo*. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, 49(1), 53-64.

- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle, Grupo de Educación Matemática. Cali.

- Egodawatte, G. (2011). *Secondary school students' misconceptions in Algebra*. (Tesis para optar al grado de doctor). Universidad de Toronto.

- Escudero, A. & Domínguez J. (2014). *De los errores identificados en la investigación a los errores encontrados en un aula de primero de bachillerato.* España: Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas (Vol. 86).

- Estrella, S. (2010). *Instrumento para la evaluación del conocimiento pedagógico del contenido de estadística en profesores de primaria*. (Tesis para optar al grado de magister). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

- Estrella, S. (2014). *The Table Object: An Epistemological, Cognitive, and Didactic Study.* (Tesis para optar al grado de doctor). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

- Fernández, C. (2001). *Relaciones lógicas–ordinales entre los términos de la secuencia numérica en niños de 3 a 6 años.* (Tesis para optar al grado de doctor), Universidad de Málaga.

- García, M. (2011). *Estudio cualitativo de datos de lectura de números y de escritura de números al dictado de alumnos de cuarto básico*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Instituto de Matemática.

- Godino, J. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para maestros*. Granada: Universidad de Granada

- Isoda, M., & Katagiri, S. (2012). *Mathematical thinking: How to develop it in the classroom*. Toh Tuck Link: World Scientific

- Johnson-Laird, P.N. (1983). *Mental models*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

- Juárez, J. A. (2011). *Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de Matemáticas de secundaria: Un análisis mediante el modelo 3UV*. Números. Revista de didáctica de las Matemáticas, *76*, 83-103.

- Kuchemann, D. (1981). *The Understanding of Generalized Arithmetic (algebra) by secondary school children.* (Tesis para optar al grado de doctor), University of London.

- Leinhardt, G.; Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). *Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching*. *Review of educational research*, *60*(1), 1-64.

- Londoño, S.; Muñoz, L.; Jaramillo, C. & Villa, J. (2011). *Una aproximación a la noción de ecuación lineal.* En XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Brasil.

- Lucchini, G.; Cuadrado, B. & Tapia L. (2006). *Errar no es siempre un error. Un estudio de los errores y dificultades en el aprendizaje de la Matemática de niños y jóvenes estudiantes.* Disponible en http://www.fundacionarauco.cl/_file/file_3878_errar%20no%20es%20siempre%20un%20error.pdf

- Mooney, C.; Briggs, M.; Fletcher, M.; Hansen, A. & McCullouch, J. (2011). *Primary mathematics: Teaching theory and practice.* SAGE.

- Ortiz, A. (1997). *Razonamiento Inductivo Numérico, un Estudio en Educación Primaria.* Accedido en http://www.redined.mec.es/oai/indexg.php?registro=008199900020

- Orton, A. & Frobisher, L. (2005). *Insights into Teaching Mathematics*. London: Continuum.

- Pedemonte, B. (2001). *Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics.* En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 33-40). Utrecht: Utrecht University.

- Piñero, E. (2011). *Errores y obstáculos en el concepto de número decimal de alumnos adultos de diferentes culturas en un entorno de falta de libertad*. Universitat autònoma de Barcelona Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les ciències experimentals.

- Resnick, L., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). *Conceptual Bases of Arithmetic Errors:* The Case of Decimal Fractions. Journal for Research in Mathematics Education, 20(1), 8-27

- Ryon, J & Williams, J. (2007). *Children's Mathematics 4-15: Learning from Errors and Misconceptions*. Berkshire: McGraw-Hill and Open University Press.

- Sardà, A. (2003). *Argumentar: propasar i validar models*. En N. Sanmartí (coord.), *Aprendre ciències tot aprenent a escriure ciència*, pp. 121-148. Barcelona: Edicions 62.

- Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think. A Theory of Goal-Oriented Decision Making and its Educational Applications*. Nueva York: Routledge.

- Simon, M. A. (1996). *Beyond inductive and deductive reasoning:* The search for a sense of knowing. Educational Studies in Mathematics, 30(2), 197-210.