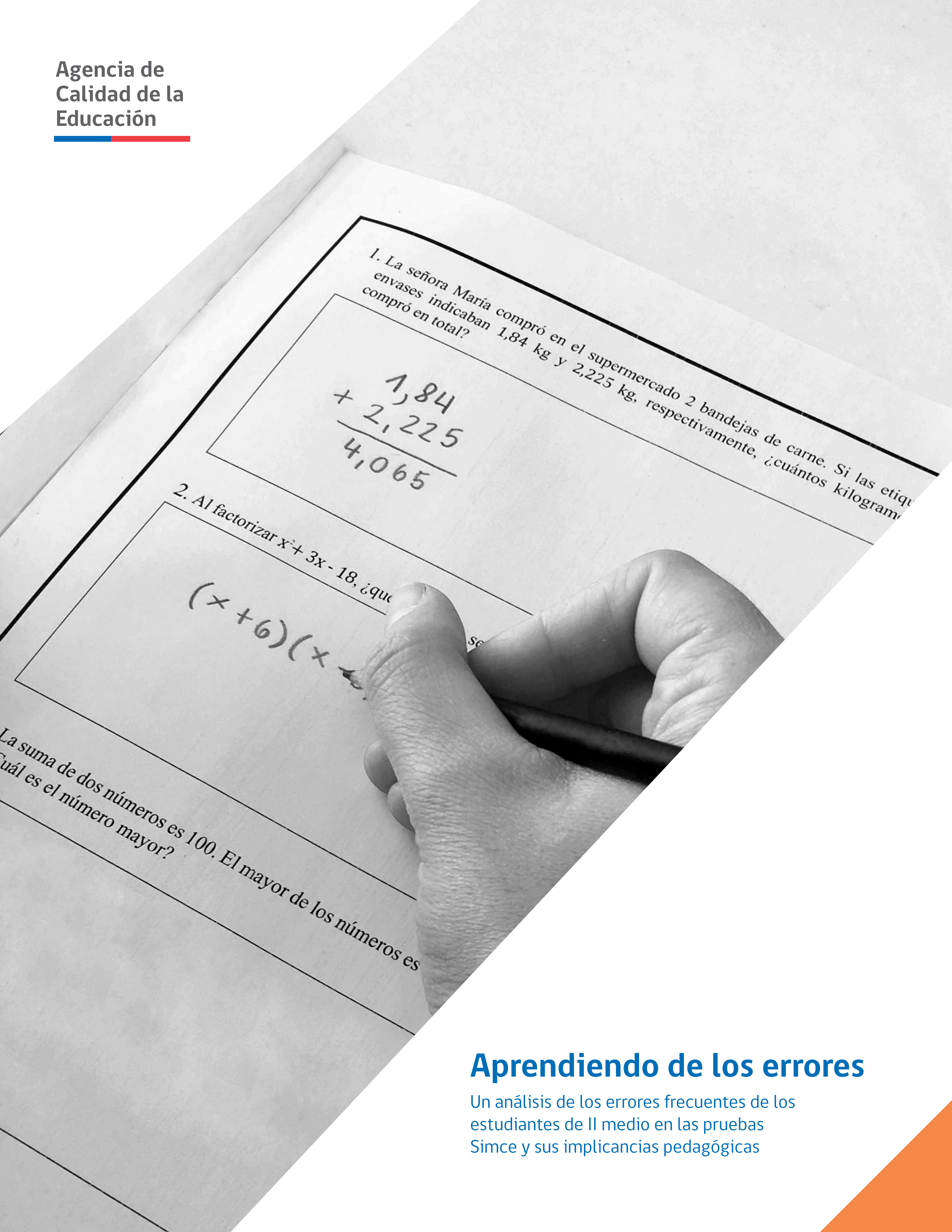
Agencia de
Calidad de la
Educación



Aprendiendo de los errores

Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de II medio en las pruebas Simce y sus implicancias pedagógicas

Agencia de
Calidad de la
Educación

Aprendiendo de los errores

Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de II medio en las pruebas Simce y sus implicancias pedagógicas

Nota: en el presente documento se utilizan de manera inclusiva términos como "el docente", "el estudiante", "los ciudadanos" y otras que refieren a hombres y mujeres.

De acuerdo a la norma de la Real Academia Española, el uso del masculino se basa en su condición de término genérico, no marcado en la oposición masculino/femenino; por ello se emplea el masculino para aludir conjuntamente a ambos sexos, con independencia del número de individuos de cada sexo que formen parte del conjunto. Este uso evita además la saturación gráfica de otras fórmulas, que puede dificultar la comprensión de lectura y limitar la fluidez de lo expresado.

Aprendiendo de los errores
Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de II medio en las pruebas Simce y sus implicancias pedagógicas
Agencia de Calidad de la Educación
contacto@agenciaeducacion.cl
600 600 2626, opción 7
Morandé 360, piso 9
Santiago de Chile
Febrero 2018

Presentación

Estimados/as docentes y directivos/as:

En la Agencia de Calidad de la Educación, como parte del Sistema de Aseguramiento de la Calidad de la Educación, trabajamos con el firme propósito de apoyar la mejora escolar para que nuestros niños, niñas y jóvenes logren aprendizajes efectivos, integrales y de calidad.

En este sentido, el Plan de Evaluaciones 2016-2020 enfatiza las evaluaciones educativas como un proceso que permite obtener información sobre los aprendizajes de los estudiantes para tomar decisiones que apunten a fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por ello, los diversos dispositivos de evaluación que utiliza la Agencia tienen el propósito de aportar al proceso de mejora de los establecimientos, entregando información y orientaciones que propicien la reflexión y toma de decisiones para un mayor logro de aprendizajes de nuestros estudiantes.

En este contexto, el libro *Aprendiendo de los errores* recopila y analiza los errores más comunes que presentan los estudiantes de II medio al responder las pruebas Simce de Matemática, ya que, desde una mirada formativa, los errores ofrecen a los docentes y a los estudiantes una oportunidad pedagógica para trabajar sobre ellos y aportar al logro de los aprendizajes esperados. El objetivo es entregar información específica y orientaciones sobre los errores comunes en Matemática, para complementar el diagnóstico que realizan los docentes y directivos en relación a los logros de aprendizaje de sus estudiantes de educación básica y media y orientar mejores estrategias de enseñanza de Matemática.

Esta iniciativa para apoyar el quehacer de los profesores se enmarca en la actual Reforma Educacional, la que ha planteado como uno de sus pilares la formación docente y el fortalecimiento de sus capacidades, para impactar positivamente en la calidad de los aprendizajes de los estudiantes.

Los invitamos a leer esta publicación y, a partir de ella, generar instancias de reflexión conjunta entre docentes y directivos de ambos niveles de enseñanza, para promover la reflexión pedagógica, la articulación de niveles, tomar decisiones y generar acciones que contribuyan a la mejora de los aprendizajes de los estudiantes en Matemática, área que es fundamental para enfrentar los desafíos del siglo XXI.

Agradecemos a los docentes y especialistas en didáctica de Matemática que participaron de la revisión de este informe, entregándonos valiosa retroalimentación que permitió contactarnos con las inquietudes y necesidades existentes y mejorar el documento sustantivamente.

Esperamos que este informe sea de utilidad para apoyar la importante labor que realizan docentes y directivos, que trabajan diariamente para mejorar la calidad de la educación de nuestros estudiantes.

Carlos Henríquez Calderón
Secretario Ejecutivo
Agencia de Calidad de la Educación

Índice de contenidos

Índice de ejemplos

Introducción

La Agencia de Calidad de la Educación realiza evaluaciones con el propósito de entregar información que contribuya a la toma de decisiones que permitan la mejora. En este sentido, las evaluaciones Simce y los Cuestionarios de Calidad y Contexto de la Educación reportan información para la toma de decisiones de política pública, pero además a cada comunidad educativa, para aportar a la gestión directiva y pedagógica.

El Plan de Evaluaciones 2016-2020 elaborado por el Ministerio de Educación, en coordinación con la Agencia de Calidad de la Educación, y aprobado por el Consejo Nacional de educación (CNED), ha planteado la importancia de mejorar las acciones de orientación y apoyo hacia las escuelas en materia de evaluación. Por ello, desde la Agencia se busca articular las evaluaciones estandarizadas con las evaluaciones de aula, aportando información y orientaciones con el propósito de que docentes y directivos puedan usar los resultados para generar estrategias que favorezcan el aprendizaje de cada estudiante. Desde esta perspectiva, resulta fundamental que estos instrumentos permitan a los docentes conocer mejor a sus estudiantes, en términos de cómo están comprendiendo y aplicando los conocimientos y habilidades; y de cuáles son los problemas y confusiones que presentan con mayor frecuencia.

En este sentido, el presente documento, *Aprendiendo de los errores*, tiene por objetivo dar a conocer una recopilación y análisis de los errores comunes que presentan los estudiantes de II medio al responder las pruebas Simce Matemática, con el fin de transmitir un enfoque de enseñanza y aprendizaje, en el que los errores que cometen los estudiantes en las evaluaciones se transforman en oportunidades para que los docentes analicen e identifiquen los problemas y las confusiones a los que se enfrentan sus alumnos en el proceso de aprendizaje. La identificación y análisis de los errores permite visualizar los desafíos que se presentan para alcanzar nuevos aprendizajes e impulsa a generar estrategias específicas para abordar estos problemas de forma constructiva.

Para recolectar la información se realizó un estudio del conjunto de preguntas aplicadas en las pruebas censales Simce II medio de 2013, 2014, 2015 y 2016[1]. Las preguntas se agruparon según los ejes de los Contenidos Mínimos Obligatorios (Objetivos de Aprendizaje de las Bases Curriculares): números, algebra, geometría y datos y azar. Cada pregunta se analizó considerando el porcentaje de estudiantes que contesta correctamente y el porcentaje de estudiantes que contesta cada uno de los distractores. Para esto, se consideró la información que entrega cada distractor respecto de los errores de comprensión de conceptos o procedimientos que implica seleccionarlo.

En relación con este estudio, es importante tener en cuenta:

- El currículo vigente para los estudiantes que rindieron las pruebas analizadas corresponde a la Actualización curricular 2009 (Decreto 256). No obstante, los errores detectados pueden ser transferibles a los aprendizajes presentes en las nuevas Bases curriculares.

1 Los ejemplos utilizados para ilustrar los errores, corresponden a preguntas Simce aplicadas en las pruebas y a otras preguntas elaboradas exclusivamente para este documento, tomando como modelo las de la prueba.

- La base del estudio es la evidencia empírica acumulada entre los años 2013 y 2016 (ejemplos de preguntas Simce), por lo que no se describen todos los errores de conceptos y procedimientos que pueden presentar los estudiantes. Dado lo anterior, no es correcto asumir que si algún error no se encuentra descrito en este documento, el aprendizaje con el que se relaciona se encuentra logrado por la mayoría de los estudiantes.
- Muchos de los problemas de aprendizaje analizados en este documento se asocian a conceptos y procedimientos que los estudiantes aprenden en educación básica y que son sustento de lo que se espera que posteriormente aprendan en la educación media. Por lo tanto, la planificación de acciones que prevengan o aborden estos problemas es una tarea que requiere ser desarrollada por el conjunto de docentes de Matemática de todos los niveles.

Este trabajo de sistematización de errores comunes en las pruebas Simce espera aportar al análisis que hacen los docentes de sus evaluaciones de aula. En ese sentido, esta publicación es un nuevo paso para la construcción de un sistema que utiliza los resultados obtenidos en las evaluaciones sumativas para retroalimentar las prácticas pedagógicas.

El documento está compuesto por dos capítulos. En el primero se describen los errores comunes que cometen los estudiantes de II medio en las pruebas Simce de Matemática, según los ejes curriculares. En el segundo capítulo, se presenta un análisis de los errores en las respuestas de los estudiantes de II medio en las pruebas Simce. Estos se agrupan de acuerdo a su naturaleza: de estructura conceptual o de procedimiento de trabajo, a partir de esto se entregan antecedentes respecto de las dificultades presentadas por los estudiantes; se precisa la influencia que tienen estas en el logro de los aprendizajes en general; y se detallan las dificultades asociadas, en el caso de que los estudiantes no logren su aprendizaje. Además de lo anterior, las dificultades de aprendizaje observadas se ejemplifican con algunas de las preguntas analizadas en el capítulo anterior y se plantean algunas consideraciones de carácter metodológico para orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje que es necesario aplicar en el desarrollo de los conceptos abordados.

Capítulo 1.

Descripción de errores por eje curricular

En esta sección se presentan los resultados de la revisión y agrupación de los errores de los estudiantes al contestar las pruebas Simce. Los distintos errores se encuentran organizados de acuerdo a ejes curriculares (números, álgebra, geometría y datos y azar), donde se presentan ejemplos y sus descripciones correspondientes. Los errores están ilustrados con preguntas tipo Simce, para que los docentes conozcan el tipo de respuestas a las que se asocia a cada error.

Tabla 1.1. *Errores comunes de estudiantes de II medio en Matemática, según eje curricular*

Eje curricular	**Ámbitos de aprendizaje**
Números	• comprensión y operatoria con números decimales y fracciones, • comprensión y manejo de las potencias, • comprensión de raíces y logaritmos y • resolución de problemas.
Álgebra	• comprensión algebraica, • operatoria algebraica, • modelamiento algebraico y • resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.
Geometría	• representación en el plano cartesiano y • aplicación de semejanza.
Datos y Azar	• determinación de probabilidades y • comprensión y determinación de medidas de tendencia central.

1.1. Eje de números

La evidencia revisada muestra que los estudiantes de II medio comúnmente presentan errores al responder preguntas que requieren comprensión del conjunto de los números racionales, de las potencias, de raíces y logaritmos.

Lo anterior repercute, además, en la presencia de errores en la realización de operaciones dentro de cada uno de estos ámbitos.

Tabla 1.2. *Eje de números. Resumen de aprendizajes involucrados en los errores de los estudiantes de II medio en las pruebas Simce Matemática*

Subárea	Ámbitos de aprendizaje	Errores específicos asociados a las respuestas incorrectas
Números decimales	• comprensión del valor posicional; • adición y sustracción con números decimales.	• confunde décimas con centésimas y centésimas con milésimas; • no considera el valor posicional y, por tanto, no alinearía las cifras de manera correcta.
Fracciones	• comprensión del significado de fracción; • comprensión de la división por un número como multiplicación por el inverso multiplicativo de este.	• no estaría considerando que una fracción corresponde a un solo número y operaría con las fracciones como si numerador y denominador fueran números independientes; • al dividir fracciones opera mecánicamente, invirtiendo el dividendo en vez del divisor; • al dividir fracciones opera mecánicamente como si se tratara de una multiplicación.
Potencias	• comprensión del significado de las potencias; • interpretación de un exponente negativo.	• al calcular la potencia de un número no estaría multiplicando la base tantas veces como lo indica el exponente y operaría multiplicando base por exponente; • interpreta que el signo del exponente debe aplicarse al resultado de elevar la base al módulo del exponente.
Raíces	• comprensión de la definición de raíz.	• no considera que calcular una raíz consiste en encontrar el factor que multiplicado por la cantidad de veces que indica el índice, da como resultado la cantidad subradical; operaría dividiendo la cantidad subradical por el índice.

[Continúa en la página siguiente].

[Continuación de la página anterior].

Logaritmos	• comprensión de la definición de logaritmo.	• no maneja la relación entre logaritmo, potencia y raíz y establece una relación errónea entre dichos conceptos, determinaría un logaritmo dividiendo el argumento por la base o bien multiplicando ambos términos.
Resolución de problemas	• interpretación y representación de la situación planteada; • interpretación de los resultados obtenidos.	• interpreta o representa la situación planteada de manera incorrecta; • se queda con el resultado matemático obtenido sin interpretarlo de acuerdo con la situación planteada en el problema.

1.1.1. Números decimales

De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de II medio a preguntas que evalúan el manejo de los números decimales, se estima que un quinto de ellos no ha consolidado la comprensión del valor posicional de las cifras, lo que puede estar relacionado con que no sepan leer este tipo de números.

Este grupo de estudiantes, frecuentemente, confundiría décimas con centésimas y centésimas con milésimas, por ejemplo, al contestar preguntas que requieren aproximar a una cifra decimal.

Ejemplo 1. *Pregunta de aproximación de números decimales*

¿Cuál es el resultado al aproximar por redondeo a la centésima el número 1,62814?

✗	1,628	Se confunde la posición de la centésima, asimilándola a la tercera cifra decimal.
✓	1,63	Respuesta correcta.

También se presentan errores en preguntas que requieren sumar o restar con números decimales de distinta cantidad de cifras enteras y/o decimales; donde cerca de un quinto de los estudiantes no consideraría el valor posicional al realizar la operatoria y, por tanto, no alinearían las cifras de manera correcta.

Ejemplo 2. *Pregunta de adición de decimales*

La señora María compró en el supermercado 2 bandejas de carne. Si las etiquetas de los envases indicaban 1,84 kg y 2,225 kg, respectivamente, ¿cuántos kilogramos de carne compró en total?

✗	2,409	No se respeta el valor posicional de las cifras al realizar la adición.
✓	4,065	Respuesta correcta.

Información curricular

"Describir y representar decimales", así como "resolver adiciones y sustracciones de decimales, empleando el valor posicional hasta la centésima, en el contexto de la resolución de problemas" se han incorporado en las Bases Curriculares de 4° básico.

Es necesario que los estudiantes consoliden estos aprendizajes para lograr, por ejemplo, el Objetivo de Aprendizaje de II medio: "Realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales".

1.1.2. Fracciones

De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de II medio a preguntas que evalúan el manejo de fracciones, se estima que cerca de un tercio de los estudiantes aún no consolida la comprensión de las fracciones y el significado de las distintas operaciones en el sistema numérico de los números racionales.

Por ejemplo, al sumar y/o restar fracciones con distinto denominador, el error más frecuente de este grupo de estudiantes se relaciona con no comprender lo que implica realizar estas operaciones y, por tanto, no considerar que para poder realizarlas se deben igualar los denominadores (y que eso implica amplificar las respectivas fracciones). De esta manera, opera sin considerar las fracciones como un solo número y realiza un procedimiento que implica sumar o restar directamente los numeradores y los denominadores respectivamente; o bien, multiplica los denominadores, pero suma o resta, según corresponda, los numeradores.

Ejemplo 3. *Pregunta de adición de fracciones*

Considerando que $b \neq 0$, ¿cuál es el resultado de $\frac{2}{5}+\frac{6}{b}$?

✗	$\frac{8}{5+b}$	Se realiza una suma directa de los numeradores y los denominadores, respectivamente.
✗	$\frac{8}{5b}$	Se opera mecánicamente, sin amplificar correctamente las fracciones (se multiplican los denominadores y se suman los numeradores).
✓	$\frac{2b+30}{5b}$	Respuesta correcta.

Nota: Se incluyó un ejemplo algebraico para ilustrar este tipo de error, debido a que facilita la visualización del procedimiento utilizado. Cabe señalar que los dos procedimientos erróneos señalados anteriormente aplican también a situaciones en las que se requiere sumar o restar fracciones no algebraicas.

También se presentan errores en preguntas que requieren comprender lo que representa la división en este sistema numérico (multiplicar el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor); donde casi un tercio de los estudiantes:

- operaría mecánicamente, invirtiendo el dividendo en vez del divisor (es posible que recuerden que hay que invertir uno de los términos y luego multiplicar, pero al no entender la lógica detrás de ello, invierten el término equivocado; o solo recuerdan que "hay que multiplicar cruzado"),
- o bien, operaría como si se tratara de una multiplicación (es posible que recuerden que hay que multiplicar, pero que no comprendan que al dividir dos fracciones hay que multiplicar el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor).

Ejemplo 4. *Pregunta de división de fracciones*

¿Cuál es el resultado de $\frac{4}{3} : \frac{7}{5}$?

✗	$\frac{21}{20}$	Se invierte el dividendo y se multiplica por el divisor.
✗	$\frac{28}{15}$	Se aplica el procedimiento de multiplicación de fracciones.
✓	$\frac{20}{21}$	Respuesta correcta.

Información curricular

La resolución de adiciones y sustracciones con fracciones propias con distinto denominador y la resolución de problemas que involucran estas operaciones son objetivos que se encuentran en las Bases Curriculares de 5° básico. Por su parte, la explicación de la multiplicación y la división de fracciones positivas, se incorpora en las de 7° básico.

Es necesario que los estudiantes consoliden estos aprendizajes para, por ejemplo, lograr el Objetivo de Aprendizaje de II medio: "Realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales". Asimismo, son necesarios para realizar operatoria con fracciones algebraicas.

1.1.3. Potencias

De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de II medio a preguntas que evalúan el manejo de las potencias, se estima que un quinto de ellos no comprende el significado de estas y las interpreta como el producto entre la base y el exponente, cuando en realidad se trata de la multiplicación iterada de la base, tantas veces como indique el exponente.

Ejemplo 5. *Pregunta de operatoria que involucra potencias*

¿Cuál es el valor de $5 \cdot 3^2 \cdot 2$?

✗	60	Se interpreta 3^2 como multiplicación 3 por 2, y no como multiplicación iterada, $3 \cdot 3$.
✓	90	Respuesta correcta.

También se presentan errores en preguntas que requieren interpretar lo que significa un exponente negativo, incluso cuando los alumnos comprenden el significado de las potencias de exponente positivo; donde casi la mitad de los estudiantes interpretaría que el signo del exponente debe aplicarse al resultado.

Ejemplo 6. *Pregunta de calcular potencia con exponente negativo*

¿Cuál es el valor numérico de la expresión $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$?

✗	$-\frac{6}{10}$	Se multiplica el numerador por el módulo del exponente. Asimismo, se multiplica el denominador por dicho módulo. Finalmente, se asigna el signo negativo al exponente del resultado.
✗	$-\frac{9}{25}$	Se considera que el signo negativo del exponente se debe aplicar al resultado de elevar la base al módulo del exponente.
✗	$-\frac{25}{9}$	Se recuerda parte de la mecánica (invertir la base), pero se habría aplicado el signo negativo del exponente al resultado.
✓	$\frac{25}{9}$	Respuesta correcta.

Información curricular

"Utilizar potencias de base 10 con exponente natural" está presente en las Bases Curriculares a partir de 7° básico. Por su parte, "explicar la multiplicación y la división de potencias de base natural y exponente natural hasta 3, de manera concreta, pictórica y simbólica" es un Objetivo de Aprendizaje de 8° básico.

Es necesario que los estudiantes consoliden la comprensión del significado de la potencia para lograr los siguientes objetivos:

- "Explicar, de manera concreta, pictórica y simbólica, la validez del teorema de Pitágoras y aplicar a la resolución de problemas geométricos y de la vida cotidiana, de manera manual y/o con software educativo" (8° básico).
- "Mostrar que comprenden las potencias de base racional y exponente entero" (I medio).
- "Mostrar que comprenden las relaciones entre potencias, raíces enésimas y logaritmos" (II medio).
- "Realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales" (II medio).

1.1.4. Raíces

De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de II medio a preguntas que evalúan el manejo de las raíces, se estima que casi un tercio de los jóvenes no ha consolidado su comprensión, lo que se traduce en problemas de cálculo de raíces exactas y de estimación de raíces.

Este grupo de estudiantes, frecuentemente, comete el error de dividir la cantidad subradical por el índice y considerar que ese resultado corresponde a la raíz del número.

Ejemplo 7. *Pregunta de estimar raíces*

¿Cuál es el valor estimado de $\sqrt{82}$?

✗	41	Se divide la cantidad subradical por el índice de la raíz; es decir, se responde a la pregunta ¿qué número multiplicado por 2 da 82?
✓	9	Respuesta correcta.

Información curricular

"Mostrar que comprenden las raíces cuadradas de números naturales" es un objetivo que está presente en las Bases Curriculares de 8° básico.

Es necesario que los estudiantes consoliden la comprensión del significado de una raíz para lograr los siguientes Objetivos de Aprendizaje:

- "Explicar, de manera concreta, pictórica y simbólica, la validez del teorema de Pitágoras y aplicar a la resolución de problemas geométricos y de la vida cotidiana, de manera manual y/o con software educativo" (8° básico).
- "Mostrar que comprenden las relaciones entre potencias, raíces enésimas y logaritmos" (II medio).
- "Realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales" (II medio).

1.1.5. Logaritmos

De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de II medio a preguntas que evalúan el manejo de los logaritmos, se estima que más de la mitad de ellos no ha consolidado la comprensión de esta definición ni domina lo que representa cada uno de los términos de un logaritmo o la relación que estos tienen con las potencias.

Este grupo de estudiantes, frecuentemente, y en lo que respecta a la relación entre logaritmos y potencias, no sería capaz de identificar la potencia que se asocia a un determinado logaritmo.

Ejemplo 8. *Pregunta de relacionar logaritmo con potencia*

Observa la siguiente igualdad:

$$log_a b = c$$

¿De qué otra manera se puede representar la relación entre a, b y c?

✗	$a^b = c$	Se considera que el argumento del logaritmo corresponde al exponente de la potencia.
✗	$b^c = a$	Se considera que el argumento del logaritmo corresponde a la base de la potencia.
✓	$a^c = b$	Respuesta correcta.

Además, se presentan errores en preguntas que requieren aplicar la definición y/o calcular un logaritmo; donde más de la mitad de los estudiantes dividiría el argumento (número) por la base o multiplicaría ambos términos antes mencionados.

Ejemplo 9. *Pregunta de calcular logaritmos*

¿Cuál es el valor de $log_3 27$?

✗	9	Se divide el número correspondiente al argumento del logaritmo por el número que corresponde a la base de este; es decir, se responde a la pregunta: ¿qué número multiplicado por 3 da 27?
✗	81	Se multiplica el número correspondiente al argumento del logaritmo por el número que corresponde a la base del mismo.
✓	3	Respuesta correcta.

Información curricular

"Mostrar que comprenden las relaciones entre potencias, raíces enésimas y logaritmos" corresponde a un Objetivo de Aprendizaje de II medio.

Es necesario que los estudiantes consoliden la comprensión de la definición de logaritmo y de lo que representan sus términos para lograr el objetivo antes mencionado.

1.1.6. Resolución de problemas

De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de II medio a preguntas que involucran la resolución de problemas, se estima que más de un tercio de ellos no interpreta la situación planteada.

Este grupo de estudiantes, frecuentemente, tendría dificultades para interpretar correctamente los problemas en los que debe idear un procedimiento para resolverlos.

Ejemplo 10. *Pregunta de interpretación de problema*

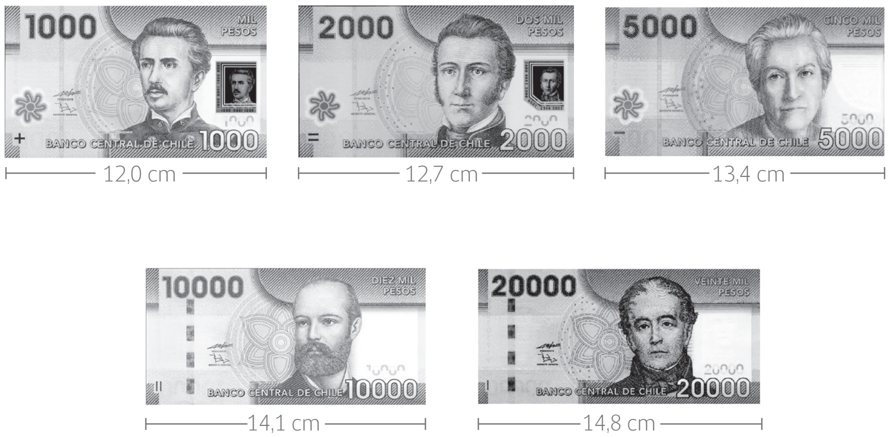
La suma de dos números es 100. El mayor de los números es cuatro veces el menor de ellos. ¿Cuál es el número mayor?

✗	75	Se interpreta "cuatro veces el menor" como "dividir en 4".
✗	25	Se realiza la misma interpretación que en el error anterior y se responde considerando el número menor, en vez del mayor.
✓	80	Respuesta correcta.

También se presentan errores en preguntas que requieren interpretar los resultados que obtienen al resolver problemas; donde cerca de un quinto de los estudiantes se quedaría con el resultado matemático sin interpretarlo de acuerdo con la situación específica que se resolvió.

Ejemplo 11. *Pregunta de interpretación de resultado*

Un juego de mesa utiliza copias de billetes de Chile. Todos los billetes tienen el mismo ancho, pero con diferentes largos, como se muestra a continuación:



Con la misma cantidad de papel que se utiliza para fabricar 8 billetes de \$5 000 y 6 billetes de \$10 000, ¿cuántos billetes de \$1 000 se pueden fabricar como máximo?

✗	16	Se aproxima el resultado obtenido 15,983 a 16 sin considerar que la pregunta implica determinar cuántos billetes de mil pesos pueden ser fabricados.
✓	15	Respuesta correcta.

Información curricular

La resolución de problemas se encuentra presente en las Bases Curriculares en todos los cursos como uno de los Objetivos de Aprendizaje ligado a las habilidades presentadas.

Es necesario que los estudiantes sean capaces de interpretar los problemas y sus resultados para lograr estos objetivos en todos los cursos.

1.2. Eje de álgebra

La evidencia revisada muestra que los estudiantes de II medio comúnmente presentan errores al responder preguntas que requieren comprensión de la operatoria algebraica, factorización y reconocimiento de productos notables, habilidad para representar algebraicamente diferentes situaciones y para resolver sistemas de ecuaciones. En la Tabla 1.3 se presenta un resumen del contenido de este apartado.

Tabla 1.3. *Eje de álgebra. Resumen de aprendizajes involucrados en los errores de los estudiantes de II medio en las pruebas Simce Matemática*

Subárea	Ámbitos de aprendizaje	Errores específicos asociados a las respuestas incorrectas
Operatoria algebraica	• comprensión de operatoria algebraica; • aplicación de la operatoria básica; • desarrollo de binomio al cuadrado.	• opera sumando o restando términos no semejantes; • no comprende la multiplicación de polinomios, al multiplicar un monomio por un binomio multiplicaría solo por el primer término del binomio, manteniendo el segundo; • no comprende la multiplicación de polinomios, al multiplicar un monomio por un binomio multiplicaría el monomio por el producto de los términos del binomio; • no comprende lo que significa elevar un binomio al cuadrado, y elevaría cada uno de sus términos al cuadrado o multiplicaría cada uno de ellos por dos.
Factorización	• comprensión de lo que significa factorizar; • desarrollo de productos notables.	• no factoriza, junta términos no semejantes y suma exponentes.
Ecuaciones	• comprensión de la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.	• no ha internalizado el significado del signo igual y opera modificando uno de los miembros de la igualdad, sin mantenerla.

[Continua en la página siguiente].

[Continuación de la página anterior].

Modelamiento algebraico	• representación algebraica de situaciones que involucran cantidades fijas y variables; • Identificación y representación de relaciones entre dos variables.	• confunde los datos que son fijos con los que son variables; • no relaciona las dos variables, establece una regularidad considerando el comportamiento de una de ellas en forma independiente.

1.2.1. Operatoria algebraica

De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de II medio a preguntas que evalúan el manejo de la operatoria algebraica, se estima que cerca de un tercio de ellos no ha consolidado este aprendizaje.

Parte de este grupo de estudiantes no comprendería que solo se pueden sumar o restar términos semejantes y comete el error, por ejemplo, de operar con términos no semejantes, generalmente sumando los coeficientes numéricos que se encuentran explícitos y elevando los factores algebraicos a la suma de sus exponentes.

Ejemplo 12. *Pregunta de comprensión algebraica*

¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a $6x + 3x^3$?

✗	$9x^4$	Se suman términos no semejantes, específicamente se suman los coeficientes explícitos (6 + 3) y se multiplican los factores algebraicos (x y x^3).
✓	$3x(2 + x^2)$	Respuesta correcta.

También se presentan errores, en esta misma proporción de estudiantes, en preguntas que requieren aplicar correctamente la operatoria algebraica, por ejemplo, multiplicar un monomio por un binomio; donde multiplicarían el monomio por el primer término del binomio, manteniendo el segundo término sin multiplicar; o bien, lo harían por el resultado de la multiplicación de los términos del binomio.

Ejemplo 13. *Pregunta de operatoria algebraica*

¿Cuál de las siguientes expresiones es el resultado de $5(x^2 + y^2)$?

✗	$5x^2 + y^2$	Se multiplica el monomio por el primer término del binomio, sin multiplicarlo por el segundo término del binomio.
✗	$5x^2y^2$	Se multiplica el monomio por el producto de los términos del binomio.
✓	$5x^2 + 5y^2$	Respuesta correcta.

En lo que respecta a desarrollar un binomio al cuadrado, más de la mitad de los estudiantes aún no consolida este aprendizaje, ya que comete errores relacionados con la falta de comprensión de la potencia de 2 (elevar al cuadrado), que significa multiplicar el polinomio por sí mismo. Los errores más frecuentes en estos jóvenes son: interpretar el exponente 2 como "multiplicar por dos" y multiplicar cada uno de los términos del binomio por el número 2; y aplicar la potencia a cada uno de los términos del binomio por separado, elevando al cuadrado cada uno de ellos.

Ejemplo 14. *Pregunta de desarrollar binomio al cuadrado*

¿Cuál de las siguientes expresiones es el resultado de $(a + 5)^2$?

✗	$2a + 10$	Se multiplica el exponente por cada uno de los términos del binomio.
✗	$a^2 + 25$	Se eleva cada uno de los términos del binomio al exponente de la expresión algebraica.
✓	$a^2 + 10a + 25$	Respuesta correcta.

Información curricular

"Reducir expresiones algebraicas, reuniendo términos semejantes para obtener expresiones de la forma $ax + by + cz$ con a, b, c, $\in Z$" es un Objetivo de Aprendizaje de 7° básico, presente en las Bases Curriculares. Por su parte, "mostrar que comprenden la operatoria de expresiones algebraicas", es uno de 8° básico.

Es necesario que los estudiantes consoliden estos aprendizajes para lograr los siguientes objetivos de grados posteriores:

- "Desarrollar los productos notables de manera concreta, pictórica y simbólica" (I medio).
- "Resolver sistemas de ecuaciones lineales (2 x 2) relacionados con problemas de la vida diaria y de otras asignaturas, mediante representaciones gráficas y simbólicas, de manera manual y/o con software educativo" (I medio).
- "Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones cuadráticas" (II medio).

1.2.2. Factorización

De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de II medio a preguntas que evalúan el manejo de la factorización algebraica, se estima que casi la mitad de ellos no ha consolidado la comprensión de esta.

Este grupo de estudiantes, frecuentemente, no comprendería el significado de la factorización; por lo que en situaciones en las que se solicita identificar la factorización de una expresión, algunos optarían por realizar una operación con términos no semejantes o sumando exponentes.

Ejemplo 15. *Pregunta de factorizar*

Al factorizar $x^2 + 3x - 18$, ¿qué expresión se obtiene?

✗	$(x + 2)(x - 9)$	Se comete un error de factorización (solo considera que los dos términos numéricos multiplicados deben dar -18, omitiendo que la suma de ellos debe ser 3).
✗	$3x^3 - 18$	Se reducen incorrectamente términos no semejantes.
✓	$(x + 6)(x - 3)$	Respuesta correcta.

Información curricular

"Desarrollar productos notables de manera concreta, pictórica y simbólica" es un objetivo presente en las Bases Curriculares de I medio.

Es necesario que los estudiantes consoliden este aprendizaje para el logro del Objetivo de Aprendizaje de II medio: "Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones cuadráticas".

1.2.3. Ecuaciones

De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de II medio a preguntas que evalúan la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones de primer grado, se estima que más de la mitad de ellos no ha consolidado este aprendizaje.

Este grupo de estudiantes, frecuentemente, abordaría mecánicamente la situación sin asegurarse que se mantengan las igualdades; por ejemplo, aplicaría el método de reducción modificando solo uno de los miembros de una de las ecuaciones.

Ejemplo 16. *Pregunta de resolver sistema de ecuaciones*

Observa el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{r|} 3x - 2y = 5 \\ -x + y = 3 \\ \hline \end{array}$$

¿Cuál es el valor de x?

✗	8	Se aplica el método de reducción amplificando solamente uno de los lados de la igualdad.
✓	11	Respuesta correcta.

Información curricular

"Resolver sistemas de ecuaciones lineales (2 x 2) relacionados con problemas de la vida diaria y de otras asignaturas, mediante representaciones gráficas y simbólicas, de manera manual y/o con *software* educativo" es un Objetivo de Aprendizaje correspondiente a I medio en las Bases Curriculares.

Para lograr este objetivo es fundamental que los estudiantes comprendan que para que una igualdad se mantenga, toda operación debe realizarse en ambos lados de la igualdad.

1.2.4. Modelamiento algebraico

De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de II medio a preguntas que evalúan el modelamiento algebraico, se estima que cerca de un tercio de ellos presenta dificultades para interpretar y representar algebraicamente situaciones que involucran una cantidad fija y una variable.

Este grupo de estudiantes, frecuentemente, confundiría los datos que son fijos y los que son variables y, por tanto, establecería una relación algebraica errónea.

Ejemplo 17. *Pregunta de representar algebraicamente*

Un plan telefónico cobra un cargo fijo de \$2 000 más \$100 por minuto hablado. Si $C(x)$ representa la función cobro en pesos y (x) la cantidad de minutos hablados, ¿cuál de las siguientes funciones representa a $C(x)$?

✗	$C(x) = 2\,000x + 100$	Se confunde el costo fijo con el costo variable.
✗	$C(x) = 2\,100x$	Se suma el costo fijo y el variable y se considera que esa "primera situación" es la variable.
✓	$C(x) = 2\,000 + 100x$	Respuesta correcta.

También se presentan errores, en más de la mitad de los estudiantes, en preguntas que requieren identificar una relación entre dos variables; donde los alumnos buscarían una regularidad en el comportamiento de una de las variables sin hacer la relación con la otra variable y asumirían que esta es la relación entre ambas. Los problemas para identificar y expresar relaciones se transfieren a diferentes sistemas numéricos.

Ejemplo 18. *Pregunta de expresar relaciones*

Observa la siguiente tabla:

x	y
1	150
2	300
3	450
4	600

¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa la relación entre los valores de x e y ?

✗	$y = \frac{x}{150}$	Se invierte la relación.
✗	$y = x + 150$	Se considera solo el comportamiento de y en términos de su aumento y no la relación de x e y.
✓	$y = 150x$	Respuesta correcta.

Información curricular

"Demostrar que comprenden la relación entre los valores de una tabla y aplicarla en la resolución de problemas sencillos" es un Objetivo de Aprendizaje de 6° básico presente en las Bases Curriculares.

Es importante que los estudiantes consoliden este aprendizaje para llegar a representar algebraicamente las relaciones.

Por su parte, "mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal" corresponde a un objetivo de 8° básico.

Es necesario que los estudiantes consoliden la comprensión de esta noción para el logro de Objetivos de Aprendizaje de grados posteriores como, por ejemplo:

- "Graficar relaciones lineales en dos variables de la forma $f(x, y) = ax + by$" (I medio).
- "Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c : (a \neq 0)$" (II medio).

1.3. Eje de geometría

La evidencia revisada muestra que los estudiantes de II medio comúnmente presentan errores al responder preguntas que requieren representar puntos, vectores o figuras en el plano cartesiano, y determinar la medida de lados en figuras semejantes. En la Tabla 1.4 se presenta un resumen del contenido de este apartado.

Tabla 1.4. *Eje de geometría. Resumen de aprendizajes involucrados en los errores de los estudiantes de II medio en las pruebas Simce Matemática*

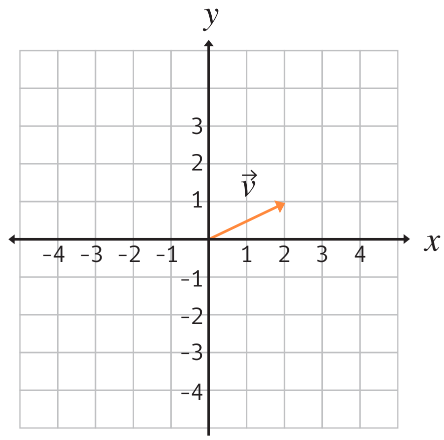
Subárea	Ámbitos de aprendizaje	Errores específicos asociados a las respuestas incorrectas
Plano cartesiano	• identificación de los ejes del plano cartesiano.	• confunde el eje de las abscisas con el de las ordenadas.
Semejanza en triángulos	• aplicación de semejanza en figuras.	• aplica relaciones que no corresponden a las que establecen la semejanza entre figuras.

1.3.1. Plano cartesiano

De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de II medio a preguntas que evalúan el manejo de representación de puntos, vectores o figuras en el plano cartesiano, se estima que cerca de un cuarto de ellos confunde el eje de las abscisas con el de las ordenadas.

Ejemplo 19. *Pregunta de representar en plano cartesiano*

Observa el siguiente plano cartesiano:



¿ Cuáles son las coordenadas del vector $\vec{v}$?

- ✗ (1,2) Se confunde el eje de las abscisas con el de las ordenadas.
- ✓ (2,1) Respuesta correcta.

Información curricular

"Identificar y dibujar puntos en el primer cuadrante del plano cartesiano, dadas sus coordenadas en números naturales", está presente en las Bases Curriculares de 5° básico. Por otra parte, "identificar puntos en el plano cartesiano, usando pares ordenados y vectores de forma concreta (juegos) y pictórica", se encuentra en las de 7° básico.

Es necesario que los estudiantes consoliden estos aprendizajes para, por ejemplo, el logro de los siguientes Objetivos de Aprendizaje:

- "Describir la posición y el movimiento (traslaciones, rotaciones y reflexiones) de figuras 2D, de manera manual y/o con software educativo" (8° básico).
- "Componer rotaciones, traslaciones y reflexiones en el plano cartesiano y en el espacio, de manera manual y/o con software educativo, y aplicar a la simetría de polígonos y poliedros y a la resolución de problemas geométricos relacionados con el arte" (8° básico).

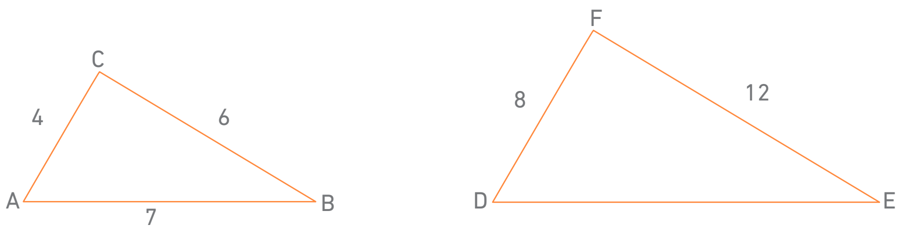
1.3.2. Semejanza de triángulos

De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de II medio a preguntas que evalúan la determinación de la medida de lados en figuras semejantes, se estima que un cuarto de ellos no ha consolidado este aprendizaje. Lo anterior se expresa, por ejemplo, en situaciones en las que se debe determinar la longitud de uno de los lados de un triángulo tomando como referente un triángulo semejante para el que se han dado todas las medidas.

Este grupo de estudiantes, frecuentemente buscaría la diferencia entre la medida de dos de los lados del triángulo, al que se le conocen todas sus medidas; o bien la diferencia entre dos de los lados semejantes de los triángulos y consideraría esa relación para determinar el lado desconocido.

Ejemplo 20. *Pregunta de determinar medida de un lado en triángulos semejantes*

Observa los siguientes triángulos ABC y DEF que son semejantes:



¿Cuánto mide el lado $\overline{DE}$?

✗	11	Se establece la relación entre la medida del lado $\overline{AC}$ y la del lado $\overline{DF}$ en términos de adición (se le suma 4), y se aplica dicha relación aritmética, obteniendo que se le debe sumar 4 a la medida del lado $\overline{AB}$. O bien, se establece la relación entre la medida del lado $\overline{AC}$ y la del lado $\overline{AB}$, en términos de adición (se le suma 3), y se aplica dicha relación aritmética al triángulo DEF, sumándole 3 a la medida del lado $\overline{DF}$.
✗	13	Se establece la relación entre la medida del lado $\overline{CB}$ y la del lado $\overline{FE}$ en términos de adición (se le suma 6), y se aplica dicha relación aritmética, obteniendo que se le debe sumar 6 a la medida del lado $\overline{AB}$. O bien, se establece la relación entre la medida del lado $\overline{CB}$ y la del lado $\overline{AB}$, en términos de adición (se le suma 1), y se aplica dicha relación aritmética al triángulo DEF, sumándole 1 a la medida del lado $\overline{FE}$.
✓	14	Respuesta correcta.

Información curricular

El concepto de proporcionalidad se encuentra presente en las Bases Curriculares de 7° básico en el Objetivo de Aprendizaje: “Mostrar que comprenden las proporciones directas e inversas”. Por su parte, la aplicación de la proporcionalidad a la semejanza de triángulos se encuentra en I medio en los objetivos:

- “Desarrollar el teorema de Tales mediante las propiedades de la homotecia, para aplicarlo en la resolución de problemas”.
- “Aplicar propiedades de semejanza y de proporcionalidad a modelos a escala y otras situaciones de la vida diaria y otras asignaturas”.

Es necesario que los estudiantes consoliden el establecimiento de relaciones de proporcionalidad para el logro de los Objetivos de Aprendizaje antes mencionados y el objetivo de I medio: "Mostrar que comprenden el concepto de homotecia”.

1.4. Eje de datos y azar

La evidencia revisada muestra que los estudiantes de II medio comúnmente presentan errores al responder preguntas que requieren haber consolidado la comprensión del significado de la probabilidad y de las medidas de tendencia central. En la Tabla 1.5 se presenta un resumen del contenido de este apartado.

Tabla 1.5. *Eje de datos y azar. Resumen de aprendizajes involucrados en los errores de los estudiantes de II medio en las pruebas Simce Matemática*

Subárea	Ámbitos de aprendizaje	Errores específicos asociados a las respuestas incorrectas
Probabilidad	• comprensión de la probabilidad; • determinación de una probabilidad a partir de información presentada en una tabla.	• divide el número de casos favorables por el número de casos no favorables; • considera la categoría de la tabla y no la frecuencia, determina la probabilidad como 1 dividido en el total de casos o como 1 dividido en la frecuencia de la categoría.
Medidas de tendencia central	• comprensión de medidas de tendencia central.	• confunde y determina otra medida; por ejemplo, calcular la media en vez de determinar la moda.

1.4.1. Probabilidad

De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de II medio a preguntas que evalúan el manejo de probabilidades simples, se estima que alrededor de un cuarto de ellos no ha consolidado este aprendizaje.

Este grupo de estudiantes, frecuentemente, no consideraría los casos posibles totales y dividiría el número de casos favorables por el número de casos no favorables.

Ejemplo 21. *Pregunta de determinar probabilidades*

En una bolsa hay 20 fichas rojas, 12 azules y 15 verdes. Si se escoge una ficha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea azul?

✗ $\frac{12}{35}$ Se considera la probabilidad como el número de casos favorables dividido por el número de casos no favorables.

✓ $\frac{12}{47}$ Respuesta correcta.

También se presentan errores en preguntas que requieren determinar una probabilidad a partir de información presentada en una tabla, ya que los estudiantes tenderían a considerar la categoría y no la frecuencia; donde cerca de un cuarto de los estudiantes consideraría la probabilidad como 1 dividido en el total de casos o como 1 dividido en la frecuencia de la categoría.

Ejemplo 22. *Pregunta de determinar probabilidades en tablas*

La siguiente tabla muestra la cantidad de estudiantes de II medio inscritos en los talleres de un liceo.

Taller	Cantidad de inscritos
Básquetbol	12
Ciencias	10
Ajedrez	8
Fútbol	15
Arte	13

Según la información de la tabla, ¿cuál es la probabilidad de que, si se elige un estudiante al azar, este se encuentre inscrito en Ajedrez?

✗ $\frac{1}{58}$ Se considera la probabilidad como la cantidad de categorías favorables dividida en el total de casos.

✗ $\frac{1}{8}$ Se considera la probabilidad como la cantidad de categorías favorables dividida por la frecuencia de dichas categorías.

✓ $\frac{8}{58}$ Respuesta correcta.

Nota: Si bien generalmente se solicita a los estudiantes presentar los resultados como fracción irreductible o número decimal, quienes responden 8/58 demuestran que son capaces de determinar probabilidad a partir de información presentada en una tabla.

Información curricular

"Explicar las probabilidades de eventos obtenidos por medio de experimentos de manera manual y/o con *software* educativo" es un Objetivo de Aprendizaje de 7° básico presente en las Bases Curriculares.

Es necesario que los estudiantes consoliden la comprensión de la probabilidad simple para lograr objetivos de cursos superiores, como, por ejemplo: "Desarrollar las reglas de las probabilidades, la regla aditiva, la regla multiplicativa y la combinación de ambas, de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo, en el contexto de la resolución de problemas", Objetivo de Aprendizaje de I medio presente en las Bases Curriculares.

1.4.2. Medidas de tendencia central

De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de II medio a preguntas que evalúan conocimiento de las medidas de tendencia central, se estima que más de la mitad de ellos no ha consolidado este aprendizaje.

Este grupo de estudiantes, frecuentemente, al enfrentar una pregunta en la que se solicita determinar media, mediana o moda, tendería a confundirse y determinar otra medida; por ejemplo, calcular la media en vez de determinar la moda.

Ejemplo 23. *Pregunta de determinar medidas de tendencia central*

La siguiente tabla muestra la cantidad de latas recolectadas por nivel en una campaña de reciclaje.

Nivel	Cantidad de latas
I medio	120
II medio	150
III medio	150
IV medio	80

Según la información de la tabla, ¿cuál es la moda de latas recolectadas por nivel?

- ✗ 125 — Se confunde el concepto de moda con el de media.
- ✓ 150 — Respuesta correcta.

Información curricular

"Mostrar que comprenden las medidas de tendencia central y el rango" es un Objetivo de Aprendizaje de 7° básico presente en las Bases Curriculares.

Se espera que los estudiantes consoliden la comprensión de las medidas de tendencia central para lograr los objetivos de cursos posteriores; por ejemplo, el de 8° básico: "Mostrar que comprenden las medidas de posición, percentiles y cuartiles".

Capítulo 2.

Análisis de errores y recomendaciones para la reflexión pedagógica

De acuerdo a los resultados presentados en el primer capítulo, se considera que los errores descritos para las respuestas de los estudiantes en las pruebas Simce Matemática se deben, principalmente, a dificultades asociadas a las estructuras conceptuales y los procedimientos de trabajo que los jóvenes han desarrollado en Matemática en sus años de escolaridad.

Tabla 2.1. *Dificultades de aprendizaje observadas a partir de los errores en las respuestas de las pruebas Simce Matemática por parte de los estudiantes*

	Presencia de dificultades en:
Estructuras conceptuales	• la comprensión y uso de las definiciones, representaciones simbólicas y propiedades esenciales de los conceptos involucrados; • el establecimiento de relaciones entre conceptos.
Procedimientos de trabajo	• la apropiación de los algoritmos y la comprensión del significado de los símbolos y sus propiedades, en el contexto de la operatoria aplicada; • la resolución de problemas, especialmente en lo que se refiere a la representación de una situación concreta utilizando el lenguaje matemático y a la interpretación de los resultados que se obtienen.

En las páginas siguientes se entregan antecedentes respecto de cada una de las dificultades presentadas por los estudiantes en relación a las estructuras conceptuales y los procedimientos de trabajo; se precisa la influencia que tienen estas dificultades en el logro de los aprendizajes en general; y se detallan las dificultades asociadas, en el caso de que los estudiantes no logren su aprendizaje. Además de lo anterior, las dificultades de aprendizaje observadas se ejemplifican con algunas de las preguntas analizadas en el capítulo anterior y se plantean algunas consideraciones de carácter metodológico para orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje que es necesario aplicar en el desarrollo de los conceptos abordados.

Es importante señalar que el examen de respuestas erróneas por parte de los estudiantes en Simce Matemática permitió observar que las causas de estas tendrían un carácter transversal, ya que una parte importante de las mismas se encuentra en preguntas pertenecientes a los distintos ejes considerados en el estudio: números, álgebra, geometría y datos y azar. Por ello, si bien las observaciones metodológicas que aquí se plantean están asociadas a contenidos de preguntas presentes en uno u otro de los ejes mencionados, se estima que ellas pueden también considerarse válidas para contenidos afines presentes en todos ellos.

2.1. Errores asociados a estructuras conceptuales

2.1.1. Comprensión y uso de las definiciones, representaciones simbólicas y propiedades esenciales de los conceptos

El logro de la comprensión de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes involucra a todos los docentes del área. Varios de los errores comunes descritos en este documento se pueden asociar a una baja comprensión de conceptos que debieron asimilar en su trayectoria escolar, necesarios para enfrentar los desafíos planteados en las evaluaciones analizadas.

Consideraciones para el proceso de enseñanza y aprendizaje

Se debe tener presente que para lograr que un concepto sea comprendido a cabalidad, debe realizarse un trabajo sistemático en lo relativo a su definición, representación simbólica y manejo de sus propiedades esenciales durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, donde se asegure:

- **la comprensión de la definición del concepto,**
- **la familiarización con su representación simbólica y**
- **la comprensión de las propiedades esenciales de dicho concepto.**

En el aprendizaje de las matemáticas, la comprensión de la definición de un concepto permite, por una parte, determinar a qué se refiere el concepto en estudio, cuál es su contenido específico y cuál o cuáles son sus campos de aplicación; y, por otra, distinguir los elementos que le corresponden a este de los que no. Si no se logra alcanzar una adecuada comprensión de la definición de un concepto, o solo se memoriza o repite sin tener conciencia clara de lo que significa, es probable que el aprendizaje de este no se logre, se produzcan confusiones y conduzca a una aplicación incorrecta.

Junto con comprender su definición, el aprendizaje de un concepto matemático por parte de los estudiantes debe incluir necesariamente una adecuada familiarización con la representación simbólica que se le asocia.

La representación simbólica es parte del lenguaje matemático, a través suyo se alude a un concepto y se entrega información breve y precisa respecto de este. Para utilizar correctamente la representación simbólica es fundamental saber interpretar cada uno de los elementos que forman parte de un determinado símbolo.

En el proceso de enseñanza y aprendizaje, la comprensión de la representación simbólica propia de los conceptos matemáticos juega un papel central, especialmente en los campos de la operatoria, la resolución de problemas y los procesos de demostración. Si un estudiante no reconoce el significado de los elementos presentes en un símbolo que expresa un concepto, o los confunde con símbolos pertenecientes a otros, puede aplicar en forma errada el concepto en cuestión.

Además, es importante tener en cuenta que el empleo del lenguaje matemático facilita la comunicación entre quienes están familiarizados con la disciplina; sin embargo, suele complicar a aquellos estudiantes que se están iniciando en este campo de conocimiento.

En el aprendizaje de un concepto los estudiantes no solo deben apropiarse de su definición y de su representación simbólica, también es necesario que logren una comprensión y un manejo consciente de las propiedades esenciales de dicho concepto. Estas permiten un aprendizaje más preciso y profundo del concepto en estudio.

Por esta razón, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de un concepto es muy importante detenerse a explicar, comentar y aplicar sus propiedades esenciales en situaciones de variados contextos. Por ejemplo, se puede iniciar el estudio de la multiplicación considerando esta como una adición de sumandos iguales. Sin embargo, la comprensión de su significado va siendo más profunda en la medida en que se introducen propiedades tales como:

- que la multiplicación es una operación conmutativa,
- que cualquier número multiplicado por 0 es 0,
- que cualquier número multiplicado por 1 es igual a sí mismo y
- que la multiplicación es distributiva con respecto a la adición y con respecto a la sustracción.

Junto con lo anterior, es necesario destacar que el proceso de aprendizaje de conceptos matemáticos, especialmente en el caso de los más fundamentales, es un proceso continuo. Nuevas propiedades se van sumando a las aprendidas inicialmente y con ello el concepto se va ampliando, profundizando, generalizando e incluso, la mayoría de las veces va experimentando transformaciones que le permiten ser adaptado a nuevos campos de aplicación.

En muchas situaciones, este proceso implica que una definición aprendida pueda ser objeto de cambios. Por ejemplo, la definición inicial de multiplicación, válida para números naturales, donde se presenta la multiplicación como una adición de sumandos iguales, pierde sentido cuando se generaliza la operación a otros campos numéricos, como los enteros, los racionales, los reales y los complejos. Para estos casos, su definición se debe adaptar, ya que, por ejemplo, contrariamente a lo que sucede con los naturales, multiplicar un número por un número entre 0 y 1 produce un resultado que es menor que el número que fue multiplicado.

Es muy importante que en los procesos de enseñanza y aprendizaje se tenga siempre presente que los conceptos matemáticos se desarrollan, adquieren nuevas propiedades y se adaptan a nuevas situaciones. Considerar que los conceptos matemáticos son dinámicos implica abordar su enseñanza en vinculación con las definiciones adquiridas previamente por los estudiantes y ayudarlos a identificar los aspectos que se modifican de modo que puedan lograr una mayor comprensión de ellos.

En esta misma línea, es relevante señalar que durante el proceso de enseñanza y aprendizaje se debe tener presente que en matemática los nuevos conocimientos se construyen sobre conocimientos anteriores. Esto obedece al carácter estructural que tienen las matemáticas. Si se desea que los estudiantes aprendan determinados conceptos es fundamental asegurarse que cuentan con aquellos conocimientos anteriores sobre los cuales descansa el nuevo concepto. Si dichos conocimientos no están presentes o son insuficientes o errados, los estudiantes presentarán dificultades en el logro de nuevos aprendizajes.

Dificultades asociadas

Si los estudiantes permanentemente no logran apropiarse de los contenidos matemáticos que se les plantean, es muy probable que en ellos se desarrollen actitudes negativas y sentimientos de rechazo hacia la asignatura que generan o agravan sus dificultades de aprendizaje. Lo anterior puede conducir, en muchos casos, a que recurran a la memorización de un conjunto de definiciones y propiedades que para ellos carecen de sentido. El saber matemático así adquirido será poco estable, no consciente y de menor calidad.

Por último, cabe señalar que, tanto la condición dinámica de los conceptos matemáticos como el hecho de que los nuevos conocimientos se construyen sobre conocimientos previos e imponen la necesidad de un trabajo colaborativo y coordinado entre los docentes de los diferentes cursos.

A continuación se presenta una de las preguntas descritas en el capítulo anterior con el fin de ejemplificar cómo los problemas en la comprensión y uso de las definiciones, de las representaciones simbólicas y de las propiedades esenciales de los conceptos, pueden conducir a cierto tipo de errores en las respuestas. Además, se entregan algunas sugerencias metodológicas que podrían conducir a un aprendizaje matemático de mejor calidad en lo relativo a la comprensión y uso de las fracciones.

Ejemplo de errores asociados a estructuras conceptuales:

- **Comprensión y uso de las definiciones, representaciones simbólicas y propiedades esenciales de los conceptos**

Ejemplo de pregunta de adición de fracciones

Ejemplo 3. *Pregunta de adición de fracciones (presentado en la página 19)*

Considerando que $b \neq 0$, ¿cuál es el resultado de $\frac{2}{5} + \frac{6}{b}$?

✗	$\frac{8}{5+b}$	Se realiza una suma directa de los numeradores y los denominadores, respectivamente.
✗	$\frac{8}{5b}$	Se opera mecánicamente, sin amplificar correctamente las fracciones (se multiplican los denominadores y se suman los numeradores).
✓	$\frac{2b+30}{5b}$	Respuesta correcta.

Nota: Se incluyó un ejemplo algebraico para ilustrar este tipo de error, debido a que facilita la visualización del procedimiento utilizado. Cabe señalar que los dos procedimientos erróneos señalados anteriormente aplican también a situaciones en las que se requiere sumar o restar fracciones no algebraicas.

Este ejemplo plantea una situación que implica una adición de fracciones de distinto denominador. Cerca de un tercio de los estudiantes comete errores al responder este tipo de pregunta. En los casos más frecuentes, operan por separado con los numeradores y los denominadores. En este caso, al realizar la adición $\frac{2}{5} + \frac{6}{b}$, obtienen como resultado $\frac{8}{5+b}$ porque suman numeradores y denominadores por separado; u obtienen $\frac{8}{5b}$ porque suman los numeradores y multiplican los dominadores.

Este error podría deberse a la no comprensión de que una fracción, si bien está compuesta de dos números (el que corresponde al numerador y el que corresponde al denominador) representa el valor que queda definido por el cociente de ambos; es decir, a la no comprensión de que cada fracción es un número, al igual que cada uno de los números naturales ya conocidos por los estudiantes.

Recomendaciones pedagógicas

El conocimiento del significado de una fracción definida como el cociente entre el numerador y el denominador constituye un conocimiento que los estudiantes deben dominar antes del estudio de la operatoria relacionada con ellas.

A continuación se señalan algunas consideraciones que, desde el punto de vista pedagógico, es conveniente tener en cuenta durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones.

Las orientaciones que se entregan en esta sección son aplicables tanto a los docentes de básica como a los de media. Para los primeros se entregan algunas recomendaciones para introducir y abordar conceptos que favorecen una comprensión profunda de los mismos. En lo que respecta a los docentes que se desempeñan en educación media, estas mismas recomendaciones pueden serles útiles para evaluar si sus estudiantes han logrado la comprensión requerida de los conceptos y, si no lo han hecho, es una herramienta para retomarlos y consolidar su comprensión.

Noción inicial de fracción

Los resultados de investigaciones realizadas en torno al proceso de enseñanza y aprendizaje de fracciones han dejado en evidencia que en niños que asisten a educación parvularia ya es posible generar una primera idea de fracción. Esta se puede originar a partir de experiencias cotidianas tales como el reparto o distribución de una fruta, de un conjunto de elementos, de los miembros de un grupo determinado de personas, etc.; es decir, situaciones en las cuales se divide una cantidad de algo en partes iguales o equivalentes y se establece una relación entre estas y la cantidad inicial. Al vivenciar este tipo de escenarios surge un concepto cualitativo de fracción que constituye la base para incorporar posteriormente un concepto cuantitativo de fracción.

Noción cuantitativa y presimbólica de fracción

Para el concepto cuantitativo de fracción se sugiere comenzar introduciendo la fracción $\frac{1}{2}$, ya que es posible que casi todos estén familiarizados con esta. La expresión "la mitad" es utilizada frecuentemente en la vida cotidiana y se relaciona con la idea básica de un todo que se divide en partes iguales, en este caso concreto, en dos partes iguales.

En esta etapa del proceso de aprendizaje de las fracciones, juega un papel fundamental la realización de actividades concretas de reparto o distribución en partes iguales, ya sea de cantidades continuas (por ejemplo: objetos, figuras geométricas, una cuerda) o de cantidades discretas (por ejemplo, un conjunto de objetos, de personas, de figuras). Al realizarlas es importante destacar que dichas partes en las que se distribuye o reparte algo tienen la característica de ser iguales y que corresponden a la "mitad" o a "un medio" de lo que se ha repartido.

Este concepto inicial de la fracción, $\frac{1}{2}$, expresado en términos verbales, puede convertirse en el fundamento sobre el que se desarrolle paulatinamente un concepto más amplio y profundo: un tipo de número que permite representar cantidades cuando estas no corresponden a un número entero de unidades.

Poco a poco, y a medida que las fracciones se utilicen en la conversación cotidiana y en la escuela, se espera que los estudiantes empiecen a conocer nuevas fracciones y el lenguaje utilizado para referirse a ellas (un tercio, tres cuartos, dos tercios, etc.). Es conveniente en un comienzo utilizar fracciones asociadas a magnitudes, destacando en cada caso el referente. Por ejemplo, hablar de tres cuartos de hora, un octavo de litro de aceite o medio kilogramo de manzanas.

Se sugiere que las situaciones que se empleen para ello no sean todas de un mismo tipo, sino que abarquen diferentes escenarios y contextos. De esta forma los estudiantes se irán formando una noción presimbólica de lo que es una fracción. La experiencia ha demostrado que esa noción constituye un punto de partida para introducir la representación simbólica de forma posterior.

Representación simbólica de las fracciones

Se recomienda no apresurarse en la enseñanza sistemática de la representación simbólica de las fracciones, ya que el símbolo que representa una fracción es un símbolo que está formado por dos números naturales separados por una línea. Cuando se está comenzando a conocer las fracciones, este carácter compuesto dificulta en muchos casos la comprensión de que dicho símbolo representa un solo número.

El inicio del estudio sistemático de las fracciones resulta ser complejo para los estudiantes, ya que implica el conocimiento de un nuevo tipo de número. Hasta ahora ellos solo han conocido y trabajado con los naturales. No resulta extraño, entonces, que exista una fuerte tendencia a aplicar a las fracciones las mismas propiedades conocidas para los números naturales.

De acuerdo a las respuestas erróneas a preguntas de las pruebas Simce Matemática de II medio relativas a fracciones, se observa en los estudiantes la tendencia a aplicar procedimientos que ya conocen para los números naturales sin considerar que, dado que la fracción representa un solo número, no es correcto aplicarlos separadamente a los numeradores y los denominadores.

Necesidad de subrayar desde un comienzo las diferencias con respecto a los números naturales

Resulta especialmente relevante presentar algunas de las propiedades o características esenciales de las fracciones estableciendo, desde un comienzo, las semejanzas y diferencias que existen entre estas y los números naturales. De facto, es la primera oportunidad para los estudiantes de enfrentarse al hecho de que algunas de las propiedades que conocen de los números naturales no son válidas para todos los tipos de número.

Una propiedad fundamental de los números naturales consiste en que ellos constituyen un conjunto discreto. Si se ordenan los números naturales de menor a mayor, entre dos números consecutivos no existe ningún otro número natural. Por esa razón, tiene pleno sentido hablar de sucesor o de antecesor.

Lo anterior no sucede en el caso de las fracciones: entre dos fracciones cualquiera siempre es posible encontrar por lo menos una fracción que es mayor que una de ellas y menor que la otra. Es más, entre dos fracciones cualquiera siempre existe una cantidad infinita de otras fracciones. Los conceptos de sucesor y antecesor no son, por tanto, aplicables a este conjunto numérico.

Otra diferencia radica en que puede haber fracciones que tengan diferente numerador y diferente denominador pero que, sin embargo, representen el mismo valor. Tal es el caso, por ejemplo, de las fracciones:

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{25}{50},$ y $\frac{50}{100}$

Es más, el valor representado por cualquier fracción puede ser representado también por una cantidad infinita de otras fracciones. Esto no sucede con los números naturales, ya que números naturales diferentes representan siempre valores diferentes.

Una nueva diferencia entre números naturales y fracciones surge del hecho de que existen fracciones que son mayores que 0, pero menores que 1. Esto tiene consecuencias relevantes tanto para la multiplicación como para la división. En efecto, si se multiplica un número ***a*** por una fracción mayor que 0, pero menor que 1, el producto es un número menor que a. Así, por ejemplo, el producto de $6 \cdot \frac{1}{2}$ es 3, y 3 es menor que 6. Esto es algo inesperado para los estudiantes que están acostumbrados a que en toda multiplicación el producto es mayor que cada uno de los factores, con la sola excepción muy especial de $a \cdot 1$, cuyo producto es igual a a, y $a \cdot 0$, cuyo producto es 0.

En la división se da una situación parecida. En los números naturales, al dividir un número a por un número natural distinto de 1 el cociente es siempre menor que a. Sin embargo, si se divide un número a por una fracción mayor que 0 pero menor que 1, el cociente resulta ser mayor que a. Así, por ejemplo, el resultado de $9 : \frac{3}{4}$ es 12, y 12 es mayor que 9.

Estas diferencias tan marcadas entre las fracciones y los números naturales tienen necesariamente consecuencias sobre el enfoque metodológico que se dé a la enseñanza inicial de las fracciones en la educación básica. Si no se toman en cuenta, se corre el peligro de que los conocimientos que el estudiante posee acerca de los números naturales, en lugar de ser una base sobre la que se construye el conocimiento de las fracciones, se conviertan en un obstáculo que dificulta su adecuada comprensión.

Fracciones en la recta numérica

Para ilustrar en forma más gráfica algunas de las semejanzas y diferencias entre fracciones y números naturales, se sugiere representar fracciones en la misma recta numérica en la que los estudiantes han representado los números naturales y analizar allí las propiedades de las fracciones y su contraste con respecto a los números naturales.

Al respecto, cabe señalar que en los últimos años se ha reunido una sólida evidencia en torno a que un buen manejo de la ubicación de fracciones en la recta numérica está estrechamente relacionado con el aprendizaje de las relaciones de orden entre fracciones, de la relación entre fracciones y números naturales, de la aritmética básica con fracciones y de la resolución de problemas que involucran fracciones.

Se considera que tener en cuenta las observaciones metodológicas antes señaladas puede resultar útil tanto para los profesores de educación básica como de educación media. A los profesores de básica les entrega elementos para abordar el proceso de enseñanza y aprendizaje de manera de ir asentando el concepto. Para los profesores de media, estas observaciones son herramientas para analizar las dificultades que presentan algunos de sus estudiantes y para poder abordarlas cuando sea necesario.

2.1.2. Establecimiento de relaciones entre conceptos

Desde el punto de vista de la psicología del aprendizaje, los conocimientos que lo seres humanos adquieren a lo largo de su vida se caracterizan por conformar estructuras. Estas estructuras no están aisladas: interactúan entre sí al igual que lo hacen los conceptos que las componen.

Consideraciones para el proceso de enseñanza y aprendizaje

Además de tener en consideración las definiciones y representaciones simbólicas, para lograr que una persona comprenda un concepto es fundamental que en el proceso de enseñanza y aprendizaje se realicen actividades orientadas a establecer relaciones entre ese concepto y otros que pertenezcan a la misma estructura conceptual o a otras ya existentes.

En este sentido, el trabajo pedagógico que se lleva a cabo para que los estudiantes amplíen el conocimiento que tienen respecto de un tema específico requiere establecer relaciones como las señaladas anteriormente. No basta con incorporar un nuevo concepto a las estructuras conceptuales ya existentes.

Los conceptos matemáticos que se estudian en los distintos niveles educativos están, la mayor parte de las veces, relacionados entre sí. Ello implica que para favorecer su aprendizajes es necesario que se establezca una adecuada coordinación entre los docentes de distintos cursos y ciclos en relación con cómo abordar dichos conceptos en los diferentes momentos de la trayectoria escolar, de modo de darle continuidad al proceso de enseñanza y aprendizaje en Matemática.

Dificultades asociadas

Si durante el proceso de enseñanza y aprendizaje no se trabajan adecuadamente las relaciones mencionadas, es probable que los conceptos que forman parte de una estructura conceptual determinada se vean afectados en:

- **su comprensión,**
- **su durabilidad en el tiempo,**
- **su aplicación en diferentes ámbitos y**
- **las interpretaciones que se hagan de ellos.**

A continuación se presentan y comentan algunas preguntas en las que comúnmente se comete errores, los que se desprenderían de la dificultad de los estudiantes para establecer relaciones entre conceptos.

Ejemplos de errores asociados a estructuras conceptuales:

Establecimiento de relaciones entre conceptos

Ejemplo de pregunta de operatoria que involucra potencias

Ejemplo 5. *Pregunta de operatoria que involucra potencias (presentado en la página 20)*

¿Cuál es el valor de $5 \cdot 3^2 \cdot 2$?

✗	60	Se interpreta 3^2 como multiplicación 3 por 2, y no como multiplicación iterada, $3 \cdot 3$.
✓	90	Respuesta correcta.

En esta pregunta los estudiantes deben obtener el resultado de una multiplicación en la que uno de los factores corresponde a una potencia de exponente natural. Al enfrentar este tipo de situación, de acuerdo a las respuestas erróneas examinadas en el capítulo 1, algunos estudiantes calculan el producto asignando el valor 6 a la potencia 3^2 (el que se obtiene al multiplicar la base por el exponente de la potencia). Las causas más probables de esta confusión son que no han asimilado la definición de potencia y que no interpretan correctamente el símbolo 3^2.

Recomendaciones pedagógicas

A continuación se entregan algunas recomendaciones que se sugiere tener en consideración en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las potencias. Estas ayudan a reforzar la relación que existe entre las potencias y la multiplicación de números naturales. La experiencia muestra que poner énfasis en esta relación evita que se cometan errores como el ilustrado anteriormente.

Las orientaciones tienen como propósito fundamental servir de base para la discusión y análisis conjunto, tanto de profesores de educación básica como de educación media. Se espera que esta información y las recomendaciones propicien la reflexión en relación con las metodologías necesarias para el proceso de enseñanza de los conceptos tratados y generen la sinergia necesaria para favorecer el aprendizaje de los estudiantes.

Significado del concepto de potencia

Una vez que los estudiantes hayan alcanzado un adecuado dominio de la multiplicación de números naturales, se recomienda realizar ejercicios de multiplicación donde un mismo factor se repita dos o más veces. A partir de lo anterior **se sugiere introducir el término de potencia y reforzar, con ejemplos, la idea de que una potencia con exponente natural no es otra cosa que una multiplicación de factores iguales, o bien una multiplicación reiterada de un mismo factor.**

Introducción del símbolo de potencia a^b

De la definición de potencia con exponente natural como una multiplicación de factores iguales, se desprende que para saber de qué potencia se trata se requiere conocer dos datos: el factor que se repite y el número de veces que esto ocurre. Por tanto, el símbolo de potencia debe contener las dos informaciones mencionadas. Pues bien, el símbolo de potencia (a^b) contiene dos números claramente diferenciables: uno que se denomina base (a) y el otro, exponente (^{b}). Además, es importante explicitar que el número que corresponde a la base indica cuál es el factor que se repite y el número que corresponde al exponente indica cuántas veces se repite dicho factor.

Para reforzar la relación entre potencias con exponente natural, multiplicaciones reiteradas de un mismo factor y la simbología de las potencias, se sugiere mostrar ejemplos que presenten las potencias expresadas con su símbolo, a partir de los cuales se solicite establecer el tipo de multiplicación del que se trata; y dar ejemplos de multiplicaciones reiteradas de factores iguales, a partir de los cuales se solicite expresarlos con potencias.

Relacionar el concepto de potencia con este tipo particular de multiplicación facilita la comprensión de su significado. Dado que las potencias se utilizan posteriormente en diversas situaciones numéricas y algebraicas, es conveniente reforzar esta relación cada vez que se introduzcan nuevos contenidos o situaciones que involucren potencias.

Ejemplos de errores asociados a estructuras conceptuales:

▸ **Establecimiento de relaciones entre conceptos**

Ejemplo de pregunta de estimar raíces

Ejemplo 7. *Pregunta de estimar raíces (presentado en la página 22)*

¿Cuál es el valor estimado de $\sqrt{82}$?

✗	41	Se divide la cantidad subradical por el índice de la raíz; es decir, se responde a la pregunta ¿qué número multiplicado por 2 da 82?
✓	9	Respuesta correcta.

Esta pregunta requiere que los estudiantes estimen una raíz cuadrada.

Es frecuente que los estudiantes, al verse enfrentados a problemas que requieren calcular o estimar raíces, cometan errores como el aquí ilustrado. Las causas más probables se asocian a dificultades en la comprensión de la definición del concepto de raíz y a una interpretación errada de su representación simbólica.

Recomendaciones pedagógicas

A continuación se entregan algunas sugerencias de cómo se puede introducir el concepto de raíz y el símbolo de raíz para favorecer su comprensión e interpretación.

Introducción del concepto de raíz

Se recomienda introducir el concepto de raíz luego de haber reforzado el concepto de potencia y de realizar actividades donde los estudiantes se enfrenten a situaciones en las que deben encontrar la base de una potencia dado su valor y el exponente al que se eleva dicha base. Para ello, se pueden plantear preguntas como: ¿cuál será la base de una potencia si se sabe que su valor es 125 y que su exponente es 3?, e incentivar a los estudiantes para que intenten responderlas considerando que se trata de encontrar una multiplicación de 3 factores iguales cuyo producto sea 125. Se recomienda invitar a los estudiantes a utilizar un procedimiento de tanteo sistemático para encontrar la solución a este tipo de preguntas. Se propone realizar preguntas similares con uso de calculadora, de manera que se puedan utilizar números mayores y se desafíe a los estudiantes a idear estrategias que les permitan llegar al resultado deseado en el menor tiempo posible.

Por otro lado, se propone relacionar el concepto de raíz con el de potencia partiendo de una de multiplicación de factores iguales, por ejemplo, $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$. Esta igualdad establece una relación entre tres números: el factor que se repite (3), el número de veces que se repite ese factor (5) y el producto de la multiplicación (243). Dado lo anterior, el concepto de potencia, tal como se señaló, representa el producto (243), cuando se consideran conocidos el factor que se repite (3) y el número de repeticiones (5). Por su parte, el concepto de raíz representa el factor que se repite (3), cuando se consideran conocidos el número de repeticiones (5) y el producto de la multiplicación (243).

Introducción del símbolo de una raíz

Se sugiere introducir el símbolo una vez que se haya comprendido el concepto de raíz y su relación con el concepto de potencia.

De acuerdo con el significado del concepto de raíz, su símbolo debe proporcionar información con respecto a dos datos: el número de repeticiones del factor que se repite en una multiplicación de factores iguales y el producto de la multiplicación de dichos factores.

En la Figura 2.1 se muestra el símbolo de la raíz quinta de 243, donde se puede observar que el símbolo correspondiente entrega los dos datos requeridos: la cantidad subradical, que es el producto de la multiplicación del factor que se repite, y el índice, que es el número de repeticiones de dicho factor. Es decir, que para encontrar el valor de la raíz indicada solo basta buscar un número que multiplicado 5 veces por sí mismo dé como resultado 243.

En términos generales, y de acuerdo al lenguaje de las potencias, se puede decir que para calcular una raíz se debe encontrar una potencia cuya base elevada a un exponente igual al índice de la raíz, tenga un valor igual al subradical de la raíz.

Figura 2.1. *Símbolo de raíz*

Índice
Número de repeticiones → $\sqrt[5]{243}$ ← Cantidad subradical
Producto de la multiplicación

Ejemplos de errores asociados a estructuras conceptuales:

Establecimiento de relaciones entre conceptos

Ejemplos de preguntas de relacionar logaritmo con potencia y de calcular logaritmos

Ejemplo 8. *Pregunta de relacionar logaritmo con potencia (presentado en la página 23)*

Observa la siguiente igualdad:

$$log_a b = c$$

¿De qué otra manera se puede representar la relación entre a, b y c?

✗	$a^b = c$	Se considera que el argumento del logaritmo corresponde al exponente de la potencia.
✗	$b^c = a$	Se considera que el argumento del logaritmo corresponde a la base de la potencia.
✓	$a^c = b$	Respuesta correcta.

Ejemplo 9. *Pregunta de calcular logaritmos (presentado en la página 24)*

¿Cuál es el valor de $log_3 27$?

✗	9	Se divide el número correspondiente al argumento del logaritmo por el número que corresponde a la base de este; es decir, se responde a la pregunta: ¿qué número multiplicado por 3 da 27?
✗	81	Se multiplica el número correspondiente al argumento del logaritmo por el número que corresponde a la base del mismo.
✓	3	Respuesta correcta.

En la primera de estas preguntas se solicita relacionar logaritmo con potencia. Se entrega una expresión de la forma $log_a b = c$ y se requiere buscar otra forma de representar la relación entre a, b y c. En este caso, frecuentemente los estudiantes establecen una relación incorrecta entre los términos.

Por su parte, la segunda pregunta requiere que los estudiantes entreguen el valor de $log_3 27$. En este tipo de situación se estima que más de la mitad de los estudiantes aplica una operación incorrecta, probablemente, por una interpretación errada del concepto de logaritmo.

Recomendaciones pedagógicas

El tema de los logaritmos puede resultar árido y complicado para muchos estudiantes si no se aborda considerando los conceptos de potencia y raíz, conocidos previamente. A continuación se entregan algunas sugerencias para abordar el concepto de logaritmo.

Introducción del significado del concepto de logaritmo

Para introducir el concepto de logaritmo se sugiere plantear a los estudiantes preguntas del tipo: si se tiene una multiplicación de factores iguales, ¿cuántas veces debe multiplicarse 5 por sí mismo para obtener 625?, ¿a qué exponente debe elevarse 10 para obtener 100 000?

Al dar respuesta a las preguntas formuladas, sin hacer referencia explícita al concepto de logaritmo, los estudiantes han encontrado el logaritmo de un número en una base determinada. En el primer caso, el logaritmo de 625 en base 5. En el segundo, el logaritmo de 100 000 en base 10.

Luego, tomando como base una multiplicación reiterada de un mismo factor, se sugiere establecer la relación que existe entre los conceptos de potencia y raíz estudiados anteriormente y el concepto de logaritmo. La potencia representa el producto de dicha multiplicación. La raíz representa el factor que se repite. El logaritmo, por su parte, representa el número de veces que se repite el factor.

Se puede, entonces, definir el logaritmo de un número, en una base determinada, como las veces que hay que multiplicar su base por sí misma para obtener dicho número. Por ejemplo, el logaritmo en base 10 de 1000 es 3 porque 1000 es igual a $10 \cdot 10 \cdot 10$, que se puede representar por la potencia 10^3.

La representación simbólica de logaritmo

El símbolo que representa el concepto de logaritmo corresponde a la expresión $log_a b$, que se lee "logaritmo en base a de b".

Para lograr que se comprenda el significado de los elementos que forman parte de este símbolo se sugiere establecer una relación con la representación simbólica de las potencias y de las raíces.

En el caso del símbolo de potencia, la base representa el factor que se repite en una multiplicación de factores iguales y el exponente de la potencia representa el número de repeticiones. Así, el símbolo de potencia entrega los dos datos que se necesitan para calcular el producto.

En el símbolo de raíz, el índice representa el número de veces que se repite el factor en una multiplicación de factores iguales, y la cantidad subradical, el producto de la multiplicación. Una vez más, el símbolo entrega los dos datos que se necesitan para determinar el factor que se repite.

El símbolo del logaritmo debería, entonces, entregar los dos datos que se necesitan: el factor que se repite en la multiplicación de factores iguales y el producto de la multiplicación. En efecto, en el símbolo $log_a b$, a es el factor que se repite y b indica el resultado de la multiplicación. Es decir, el símbolo indicado proporciona los dos datos que permiten encontrar las veces que hay que repetir el factor.

En términos de potencia, se puede señalar que para encontrar el logaritmo de un número en una base hay que determinar a qué exponente debe elevarse la base del logaritmo para obtener como resultado el número correspondiente al logaritmo que se desea calcular.

A modo de resumen, se plantea que para que los estudiantes se apropien de los conceptos de potencia, raíz y logaritmo no basta con proporcionar su definición y su representación simbólica, además es necesario realizar actividades que los relacionen. Para tal efecto se recomienda que cuando se presenten estos conceptos, se destaque la relación que existe entre estos, empleando, cuando se considere necesario, ejemplos numéricos que permitan visualizar mejor tales relaciones.

Ejemplos de errores asociados a estructuras conceptuales:

Establecimiento de relaciones entre conceptos

Ejemplo de pregunta de expresar relaciones

Ejemplo 18. *Pregunta de expresar relaciones (presentado en la página 33)*

Observa la siguiente tabla:

x	y
1	150
2	300
3	450
4	600

¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa la relación entre los valores de x e y ?

- ✗ $y = \frac{x}{150}$ Se invierte la relación.
- ✗ $y = x + 150$ Se considera solo el comportamiento de y en términos de su aumento y no la relación de x e y.
- ✓ $y = 150x$ Respuesta correcta.

En esta pregunta se presenta una tabla simple de dos columnas, las que representan una relación entre las variables x e y. La tabla entrega los valores de y para cuatro valores de x. A partir de esa información se solicita identificar una ecuación de dos variables que represente la relación entre x e y expresada en la tabla dada. En situaciones como esta, se estima que un grupo importante de estudiantes comete errores al establecer la relación existente entre variables y al traducirla a lenguaje matemático.

Recomendaciones pedagógicas

Posiblemente, las principales dificultades que llevan a los estudiantes a cometer errores al responder este tipo de pregunta se relacionan con la interpretación, tanto de la información que entrega la tabla como del significado de una ecuación de dos variables.

Interpretación de tablas de valores

Los estudiantes se encuentran familiarizados desde cursos tempranos con tablas para buscar reglas que describen patrones simples presentes en secuencias numéricas. Para ello se concentran, principalmente, en las variaciones que muestran los números. En esta pregunta, en cambio, se presenta un tipo de tabla que entrega información acerca de la relación que existe entre los valores que adquiere y cuando x toma ciertos valores, o bien, los que adquiere x cuando y toma ciertos valores. Por tanto, si los estudiantes no están familiarizados con la lectura e interpretación de este tipo de tabla es muy probable que, frente a situaciones como la de esta pregunta tiendan, por ejemplo, a aplicar la misma lógica usada en el tipo de tablas para describir secuencias y usen solo los valores de una de las dos variables.

Para evitar que los estudiantes cometan el tipo de errores aquí observados, se recomienda trabajar con ellos la interpretación de tablas de valores poniendo acento en el tipo de información que estas entregan. De esta manera, identificarán con mayor facilidad que lo que expresa la tabla en este caso es una relación entre dos variables.

Significado de ecuaciones de dos variables

Otra de las dificultades que posiblemente conduce a algunos estudiantes a cometer los errores ilustrados, se relaciona con la comprensión del significado de una ecuación de dos variables.

Normalmente, el trabajo con ecuaciones se inicia con aquellas en las que aparece una incógnita. Además, se parte de la base que hay un solo valor de la incógnita que satisface la ecuación y que la tarea consiste en encontrar dicho valor.

De esta manera, cuando se introduce el estudio de ecuaciones que incluyen más de una variable y en las que ninguna de ellas posee el carácter de incógnita, algunos estudiantes no logran comprender su significado. Es decir, no comprenden que dichas ecuaciones representan una relación entre las variables que en ellas aparecen y, por tanto, presentan dificultades para interpretar el hecho de que esta ecuación informa acerca de qué sucede con una de las variables cuando varía la otra, o bien, cuánto debe valer una de ellas cuando a la otra se le adjudica un cierto valor.

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de ecuaciones, cuando se relacionan dos variables es importante destacar que se está ante un tipo de ecuación distinta de las que han conocido hasta el momento. Es decir, subrayar que en estos casos no se busca conocer el valor de una incógnita. Así también, se sugiere insistir en que el tipo de información que está entregando la ecuación se refiere a la relación que existe entre dos variables.

Es conveniente, asimismo, ayudar a que los estudiantes comprendan que en este tipo de ecuaciones las variables no aceptan solo un valor, sino que, como su nombre lo indica, pueden tomar distintos valores. Además, reforzar que si una de las variables cambia de valor, necesariamente la otra también lo hace, porque los valores de ellas están relacionados entre sí y, por tanto, los valores de una dependen de los valores de la otra.

Ambas dificultades descritas anteriormente se relacionan con aplicar un modelo o fórmula conocida a una situación nueva en la que dicho modelo no aplica. Para evitar que esto ocurra, se recomienda que se expliciten las diferencias con cada nueva introducción.

2.2. Errores asociados a procedimientos de trabajo

2.2.1. Apropiación de los algoritmos y comprensión del significado de los símbolos y sus propiedades

Los procedimientos de cálculo de las operaciones relacionadas con los distintos conjuntos numéricos que los estudiantes van aprendiendo en el proceso de enseñanza y aprendizaje de Matemática implican el aprendizaje de algoritmos y símbolos, de su relación con las propiedades de las operaciones que se emplean y de su campo de aplicación.

■ Consideraciones para el proceso de enseñanza y aprendizaje

El aprendizaje de un procedimiento de cálculo específico no implica tan solo apropiarse de un conjunto de pasos y reglas que se aplican mecánicamente para encontrar el resultado de una operación, es necesario también estar conscientes de las características de la operación que se aplica y del conjunto numérico en el cual es válido.

Los algoritmos de cálculo representan el conjunto de pasos y de reglas que hay que seguir para obtener el resultado de una operación matemática. Dichos algoritmos son, en general, propios de una operación específica que se aplica a un determinado conjunto numérico. Por ejemplo, el algoritmo de la operación de adición es diferente al algoritmo de la operación de división, así también el algoritmo de la adición de fracciones es diferente al que se debe emplear en la adición con números naturales o con números negativos.

Se sugiere que en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los algoritmos de cálculo se propongan ejercicios que destaquen cada una de las reglas y pasos que lo conforman y su relación con propiedades de la operación correspondiente. Para tal efecto, se recomienda no utilizar una gran cantidad de ejercicios y ejemplos, que muchas veces cansan y abruman a los estudiantes, sino un número limitado de estos, de manera de que puedan ser analizados con la profundidad necesaria para que se logre un adecuado nivel de comprensión y una aplicación consciente de los mismos.

Así también, se sugiere incorporar ejercicios que requieran discriminar entre situaciones en las que las reglas y pasos de un algoritmo determinado pueden aplicarse, y otras situaciones en las que no son válidos, y evitar así posteriores errores en los cuales se hacen extensivos a operaciones que no corresponden o a conjuntos numéricos que presentan características diferentes a aquellas del conjunto en que se emplea dicho algoritmo. Esto es especialmente importante cada vez que se introduce un nuevo campo numérico ya que en tales casos es conveniente ver si los algoritmos que los estudiantes conocen son válidos o si es necesario introducir otros nuevos.

Cabe destacar que es posible que exista más de un algoritmo para encontrar el resultado de una operación y que, en tal caso, puedan ser los propios estudiantes quienes decidan cuál les resulta más conveniente. También puede darse el caso que un mismo algoritmo, a veces con pequeñas variantes, pueda ser utilizado para el cálculo de más de una operación.

Los símbolos presentes en las operaciones y sus propiedades son también un factor relevante en el aprendizaje de una operatoria. Muchas veces se tiene una concepción restringida de estos y se desconocen sus propiedades, lo que dificulta su comprensión.

Un símbolo importante de comprender, y para el que con frecuencia se observa una concepción restringida, es el signo igual. Este es uno de los primeros símbolos matemáticos que los estudiantes conocen, ya que lo usan en el campo de la aritmética vinculado al resultado de una operación. Este uso particular del signo igual se relaciona con una concepción operacional que se caracteriza por una igualdad no simétrica en la que cada uno de sus lados cumple su propia función: la del lado izquierdo del signo presenta la operación a realizar y la del lado derecho presenta el resultado.

La concepción del signo igual anteriormente descrita es limitada, ya que, por ejemplo, una igualdad del tipo: $12 + 4 = 18 - 2$ no calza con dicha concepción. En este caso, el signo está señalando que la expresión matemática de la izquierda representa la misma cantidad que la expresión matemática de la derecha. Esta corresponde a una concepción relacional en la que este señala la relación que existe entre lo expresado a un lado de él y lo expresado en el otro lado. Esta concepción es fundamental para el trabajo con ecuaciones en el campo del álgebra.

Junto con comprender las diferentes concepciones que puede tener el signo igual, es fundamental comprender algunas de sus propiedades:

- Propiedad idéntica o reflexiva. Establece que toda cantidad es igual a sí misma.

  Por ejemplo:

  $5x = 5x$; $6 + 4 = 6 + 4$

- Propiedad simétrica. Refiere al hecho de que es posible cambiar el orden de los miembros de una igualdad sin que la igualdad se altere.

  Por ejemplo:

  Si $9 + 10 = 19$, entonces $19 = 9 + 10$

  Si $a + b = c$, entonces $c = b + a$

  Si $x = y$, entonces $y = x$

- Propiedad transitiva. Refiere a que si en dos igualdades hay un elemento que es común, entonces los otros dos miembros son iguales.

  Por ejemplo:

  Si $4 + 6 = 10$ y $5 + 5 = 10$, entonces $4 + 6 = 5 + 5$

  Si $x + y = z$ y $a + b = z$, entonces $x + y = a + b$

  Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$

- Propiedad uniforme. Plantea que, si se suma o resta o se multiplica o divide la misma cantidad en ambos miembros de una igualdad, la igualdad se conserva.

> Por ejemplo:
>
> Si $2 + 8 = 10$, entonces $(2 + 8)^3 = (10)^3$
>
> Si $a = b$, entonces $a + x = b + x$
>
> Si $5x = 12$, entonces $\frac{5x}{3} = \frac{12}{3}$

- Propiedad cancelativa. Plantea que en una igualdad se pueden suprimir dos elementos iguales en ambos miembros y la igualdad no se altera.

> Por ejemplo:
>
> Si $(2x + 8) – 6 = 12 – 6$, entonces $2x + 8 = 12$
>
> Si $a + b = c + b$, entonces $a = c$

Dificultades asociadas

Entre los errores más frecuentes que se presentan en el empleo de un algoritmo destacan, por un lado, los errores de aplicación por olvido de alguno de los pasos o por una incorrecta aplicación de las reglas correspondientes y, por otro lado, por la aplicación indebida de un algoritmo a una operación para la cual no es válido.

Asimismo, la no comprensión de las propiedades descritas del signo igual obstaculiza la resolución de ecuaciones de manera reflexiva y aumenta la posibilidad de cometer errores que se derivan de una aplicación mecánica de pasos.

A continuación se analizan algunas preguntas en las que el tipo de errores comunes observados pueden ser atribuidos a los aspectos mencionados en relación con los procedimientos de cálculo utilizados. Además, se entregan algunas sugerencias metodológicas a considerar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las temáticas evaluadas en los ejemplos de preguntas.

Ejemplos de errores asociados a procedimientos de trabajo:

Apropiación de los algoritmos y comprensión del significado de los símbolos y sus propiedades

Ejemplo de pregunta de adición de números decimales

Ejemplo 2. *Pregunta de adición de decimales (presentado en la página 18)*

La señora María compró en el supermercado 2 bandejas de carne. Si las etiquetas de los envases indicaban 1,84 kg y 2,225 kg, respectivamente, ¿cuántos kilogramos de carne compró en total?

✗	2,409	No se respeta el valor posicional de las cifras al realizar la adición.
✓	4,065	Respuesta correcta.

Esta pregunta plantea una situación que involucra una adición de dos números que tienen distinta cantidad de cifras decimales. Una de las respuestas incorrectas que dan los estudiantes con frecuencia es 2,409, la cual refleja que están aplicando el algoritmo para la adición de números naturales en el campo de los números decimales al alinear ambos sumandos por la derecha. Es decir, no hacen diferencias entre los naturales y los decimales al momento de realizar la adición ya que consideran los sumandos como si se tratara de números naturales.

Este error también revela que los estudiantes tienen dificultades en el reconocimiento del valor de posición de las cifras en el caso de los números decimales.

Recomendaciones pedagógicas

A continuación se señalan algunas consideraciones importantes de tener presentes durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la adición y sustracción con números decimales.

En primer lugar, cabe mencionar que la escritura de los números en el sistema de numeración decimal se basa en que el valor representado por cada cifra depende de la posición que esta ocupa en el número. Así, por ejemplo, en el número 1,84, el 1 representa 1 unidad, el 8 representa 8 décimas y el 4 representa 4 centésimas. Por su parte, en el número 2,225, el primer 2 representa 2 unidades, el segundo 2 representa 2 décimas, el tercer 2 representa 2 centésimas y el 5 representa 5 milésimas.

Al realizar una adición, tanto en el ámbito de los números naturales como el de los decimales, tal como lo indica su algoritmo, se debe calcular la suma de los números que en ambos sumandos tienen el mismo valor de posición, partiendo de las cifras con menor valor de posición.

En el caso de los números naturales, implica calcular la suma de unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas, etc.

En el caso de los números decimales, se parte del decimal que ocupa el menor valor de posición; por ejemplo, si el número tiene 3 cifras decimales y una unidad, se calcula la suma de las milésimas con milésimas, centésimas con centésimas, décimas con décimas y unidades con unidades.

Si se trata de una adición con decimales de distinto número de cifras, como la que es necesario llevar a cabo para contestar esta pregunta, es conveniente, inicialmente, realizar algunos ejercicios que muestren que es posible considerar que en el lugar de las milésimas hay un 0, haciendo hincapié en que ello no cambia el valor del número correspondiente. En la pregunta formulada la adición a realizar sería la que se indica a continuación:

$$\begin{array}{r} 1{,}840 \\ +\ 2{,}225 \\ \hline \end{array}$$

A partir del análisis del error observado en preguntas de este tipo, se sugiere que al iniciar el estudio de los procedimientos de cálculo de una adición de números decimales se planteen y comenten algunos ejercicios, en los cuales los estudiantes tengan que reconocer qué posición ocupa cada uno de los dígitos que conforman los diferentes números decimales. Así también, contrastar los ejercicios descritos con otros referidos a números naturales. Muchos estudiantes confunden, por ejemplo, el nombre decenas con décimas, centenas con centésimas, etc.

Posteriormente, se sugiere presentar ejercicios de adición en forma vertical, tanto para el caso de números decimales como naturales, haciendo hincapié en que se debe cuidar de sumar los dígitos que tengan el mismo valor de posición en ambos sumandos.

Las observaciones anteriormente expresadas ponen en evidencia la necesidad de asegurar la comprensión del concepto de valor de posición que se inicia a nivel de la educación básica, ya que es fundamental para una aplicación correcta del algoritmo de cálculo en operaciones, tales como la adición y la sustracción de números naturales y decimales. Por su parte, la necesidad de calcular la suma de los números que tienen el mismo valor de posición introduce una lógica que posteriormente, a nivel de la educación media, puede ser transferida a la adición de expresiones algebraicas en la que se deben sumar términos semejantes.

Ejemplos de errores asociados a procedimientos de trabajo:

Apropiación de los algoritmos y comprensión del significado de los símbolos y sus propiedades

Ejemplos de preguntas de álgebra

Ejemplo 12. *Pregunta de comprensión algebraica (presentado en la página 28)*

¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a $6x + 3x^3$?

✗	$9x^4$	Se suman términos no semejantes, específicamente se suman los coeficientes explícitos (6 + 3) y se multiplican los factores algebraicos (x y x^3).
✓	$3x(2 + x^2)$	Respuesta correcta.

En esta pregunta se requiere encontrar una expresión que sea equivalente a la adición $6x + 3x^3$.

Como puede observarse, los dos términos de esta adición tienen factores que son comunes: en los coeficientes el 3 es factor común de 6 y de 3; a su vez, en la parte literal x es factor común de x y de x^2. Por lo tanto, es posible sacar factor común $3x$ y llegar al resultado: $3x\ (2 + 3x^2)$.

Uno de los errores comunes que cometen los estudiantes al enfrentar este tipo de preguntas consiste en intentar aplicar el algoritmo propio de la adición de números naturales a expresiones algebraicas en las cuales dicho algoritmo no es aplicable. Por esto, terminan dando como resultado un término algebraico erróneo, obtenido de sumar los coeficientes numéricos y los exponentes de los factores literales.

Esto muestra que los estudiantes no han comprendido que la adición de términos algebraicos es diferente a la adición de números naturales, ya que en álgebra solo es posible sumar términos que son semejantes. Un término algebraico está compuesto por un coeficiente numérico y un factor literal y la relación que existe entre ambas partes es de multiplicación. Por ejemplo, $6x$ representa 6 veces x, y $3x^3$ representa 3 veces el cubo de x, donde x es un valor desconocido. En álgebra, dos o más términos son semejantes si ellos tienen el mismo factor literal. En consecuencia, los términos algebraicos $6x$ y $3x^3$ no son términos semejantes porque los factores literales x y x^3 no son iguales, por lo tanto, ellos no se pueden sumar.

Para reforzar los aspectos señalados anteriormente es conveniente iniciar el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra con situaciones donde los estudiantes puedan comprender lo que representa cada término en una expresión algebraica. Así también, proponer ejercicios orientados a que puedan distinguir entre términos algebraicos que son semejantes y términos algebraicos que no lo son.

Ejemplo 13. *Pregunta de operatoria algebraica (presentado en la página 29)*

¿Cuál de las siguientes expresiones es el resultado de $5(x^2 + y^2)$?

✗	$5x^2 + y^2$	Se multiplica el monomio por el primer término del binomio, sin multiplicarlo por el segundo término del binomio.
✗	$5x^2y^2$	Se multiplica el monomio por el producto de los términos del binomio.
✓	$5x^2 + 5y^2$	Respuesta correcta.

Esta pregunta plantea un caso inverso al de la pregunta anterior, ya que aquí se requiere pasar de la multiplicación de un monomio por un binomio a la suma de dos monomios. Los errores observados en este caso muestran que los estudiantes desconocen un algoritmo para llevar a cabo la operatoria requerida y aplican algoritmos de operaciones como la adición y la multiplicación, los que son aplicables en el campo de la aritmética, no así al de operatorias algebraicas.

Recomendaciones pedagógicas

Cabe señalar que para resolver correctamente el tipo de pregunta que se plantea en los dos ejemplos descritos anteriormente es necesario aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición.

La distributividad de la multiplicación con respecto a la adición implica que una multiplicación del tipo $a(b + c)$ es equivalente a la adición $ab + ac$. Es decir: $a(b + c) = ab + ac$. En las que a, b y c pueden ser números o términos algebraicos.

La expresión $a(b + c)$ es una multiplicación en que uno de los factores es una adición. La expresión $ab + ac$ es una adición en que los dos sumandos tienen un múltiplo común; en este caso, el número o el término algebraico representado por la letra a. Ambas expresiones son equivalentes, lo que implica considerar que si se tiene una multiplicación en que uno de los factores es una adición, se puede transformar en una adición en que ambos sumandos tengan un múltiplo común (esto es válido también si en lugar de adiciones se trata de sustracciones).

De acuerdo con lo anterior, es posible señalar que los errores cometidos por los estudiantes en los dos casos analizados se pueden atribuir, principalmente, a la no comprensión o al manejo inadecuado de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición. Esta es una propiedad fundamental de la multiplicación, por tanto es conveniente que en su proceso de enseñanza se realicen ejercicios donde los estudiantes puedan verificarla con ayuda de una amplia gama de valores numéricos. Así también, se recomienda que al efectuar operaciones algebraicas como las que se describen en los ítems anteriores se establezcan las relaciones que existen entre este tipo de preguntas y la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición.

Ejemplos de errores asociados a procedimientos de trabajo:

Apropiación de los algoritmos y comprensión del significado de los símbolos y sus propiedades

Ejemplo de pregunta de resolver sistema de ecuaciones

Ejemplo 16. *Pregunta de resolver sistema de ecuaciones (presentado en la página 31)*

Observa el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{r|} 3x - 2y = 5 \\ -x + y = 3 \\ \hline \end{array}$$

¿Cuál es el valor de x?

✗	8	Se aplica el método de reducción amplificando solamente uno de los lados de la igualdad.
✓	11	Respuesta correcta.

En esta pregunta se requiere encontrar el valor de la incógnita x en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Un error común que cometen los estudiantes en preguntas de este tipo se deriva de efectuar erróneamente la amplificación de la segunda ecuación, ya que multiplican solo uno de los miembros de la igualdad, el de la izquierda. Posteriormente, proceden a sumar los términos de ambos lados de las igualdades. De esta manera es como muchos estudiantes llegan a obtener 8 como solución.

Este tipo de error es atribuible a que los estudiantes no están aplicando correctamente las propiedades de la igualdad. Por esto, **se sugiere que antes de enfrentar a los estudiantes con situaciones en las que deben resolver ecuaciones, se refuerce el concepto de igualdad.**

A continuación se indican algunas recomendaciones para abordar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de ecuaciones.

Recomendaciones pedagógicas

En primer lugar, es conveniente tener presente que el logro del aprendizaje de la resolución de ecuaciones implica recorrer un camino largo, ya que no existe una receta única que sirva para todos los casos. Sin embargo, existen algunas ideas generales sobre las cuales es conveniente hacer hincapié. Una de estas es que, dado que una ecuación es una igualdad, esta puede ser transformada en otra sin que se pierda la igualdad, teniendo presente las siguientes propiedades del signo igual, referidas anteriormente:

- Una igualdad se conserva si a ambos miembros de ella se suma o resta una misma cantidad.

  Por ejemplo:

  Si en la ecuación $11 + x = 19 - x$ se resta 11 a ambos miembros, se tiene la ecuación: $x = 8 - x$.

  Si a ambos miembros de esta nueva ecuación se suma x, se obtiene $2x = 8$.

- Una igualdad se conserva si ambos miembros de ella se multiplican o se dividen por una misma cantidad.

  Por ejemplo:

  Si en la ecuación $23 - 2x = 9$ se resta 23 a ambos miembros, se tiene la ecuación $-2x = -14$.

  Si se divide ambos miembros de esta nueva ecuación por -2, se obtiene $x = 7$.

De esta manera, la resolución de ecuaciones consiste en realizar las transformaciones más adecuadas de modo de aislar la incógnita que se quiere conocer. En tal sentido, los pasos a seguir para resolver una ecuación son:

Figura 2.2. *Pasos a seguir en la resolución de ecuaciones*

1 Examinar atentamente la ecuación dada e identificar lo que convendría modificar, formulando preguntas del tipo:

- ¿es necesario resolver algún paréntesis?,
- ¿convendría eliminar algún término?,
- ¿se necesita reunir términos que están separados?,
- ¿habría que modificar algunos coeficientes numéricos?, etc.

2 Una vez que se tiene claro lo que se desea conseguir, escoger la transformación necesaria para lograrlo, formulando preguntas, tales como:

- ¿hay algo que se pueda hacer de inmediato en la ecuación original?,
- ¿convendrá sumar o restar algún valor a ambos miembros de la igualdad?,
- ¿convendrá multiplicar o dividir ambos miembros de la igualdad por un mismo valor?,
- ¿habrá que realizar más de una transformación?, etc.

Si las transformaciones han sido adecuadas, la ecuación o el sistema de ecuaciones estará resuelto.

Considerando lo anterior, se recomienda que, para lograr un aprendizaje más sólido y fundamentado de la resolución de ecuaciones, se trate cada ecuación como un caso particular de un procedimiento general y no como un caso único, nuevo y diferente. Comprender en qué consiste este procedimiento general es fundamental para no caer en una mecanización del proceso que muchas veces conduce a cometer errores.

Estas recomendaciones son aplicables tanto durante el inicio del proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de ecuaciones, como en cursos posteriores.

2.2.2. Resolución de problemas

Aprender a resolver problemas con ayuda de las matemáticas es uno de los objetivos centrales de esta área del conocimiento. Cuando los estudiantes logran obtener información desconocida a partir de información conocida utilizando procedimientos matemáticos, están aumentando su conocimiento y desarrollando su capacidad de pensar.

A su vez, los contenidos matemáticos asociados a cada nivel del sistema educacional van adquiriendo sentido para los estudiantes en la medida en que logran tomar conciencia de que su aplicación a situaciones concretas les permite ampliar el conocimiento de sí mismos, del entorno y resolver problemas que surgen en la interacción que se tiene con dicho mundo.

Consideraciones para el proceso de enseñanza y aprendizaje

Es importante tomar en cuenta que resolver problemas haciendo uso de las matemáticas es una habilidad que se desarrolla a lo largo de todos los niveles educativos. Año a año, los contenidos matemáticos van agregando nuevas herramientas que permiten a los estudiantes enfrentar una gama cada vez más amplia de problemas, al tiempo que despliegan y mejoran sus habilidades para aplicar sus conocimientos matemáticos en la resolución de estos.

La resolución de problemas es una tarea compleja que se caracteriza por ser un procedimiento en el que cada situación tiene matices que la hacen única. No se trata de un procedimiento estereotipado, inmutable, válido para todo problema y que pueda realizarse de manera mecánica. No obstante, es posible señalar algunos pasos, definidos dentro de un modelo simplificado de resolución de problemas, que pueden ayudar a enfrentar cada situación particular. A continuación en la Figura 2.3 se describen dichos pasos.

Figura 2.3. *Pasos en la resolución de problemas*

1 **Comprensión del problema.**
El primer paso para la resolución de un problema implica el reconocimiento de la pregunta a la que se le debe dar respuesta y de los datos que se disponen para ello. Es decir, que los estudiantes discriminen claramente entre la información disponible y la información deseada.

2 **Representación de la situación concreta en un lenguaje matemático.**
El segundo paso, corresponde a un análisis de la información conocida, de las herramientas matemáticas con las que se dispone y de las experiencias previas relacionadas con el problema planteado para, basándose en estos antecedentes, diseñar una estrategia de resolución del problema que implica expresar la situación concreta en un lenguaje matemático. En la mayoría de los problemas que se plantean tanto en educación básica como en educación media, dicho lenguaje se refiere al uso de herramientas como, por ejemplo, propiedades de los números, operaciones aritméticas o ecuaciones algebraicas. De esta forma, el problema del mundo real se transforma en un problema de carácter matemático.

3 **Resolución del problema matemático.**
El tercer paso corresponde a la resolución del problema matemático, empleando las herramientas matemáticas que están implícitas en él. Por ejemplo, desarrollar los procedimientos de cálculo que corresponda, resolver la o las ecuaciones planteadas, aplicar los teoremas que sean pertinentes, etc. En este paso se llega a una solución matemática del problema planteado.

4 **Interpretación y evaluación de resultados.**
El último paso corresponde a interpretar la solución matemática vinculándola al contexto en que surgió el problema y evaluar su consistencia.

El paso de representación de la situación concreta utilizando un lenguaje matemático es muy relevante dentro del proceso de resolución de problemas, ya que las decisiones que aquí se adopten son determinantes para lograr resolver con éxito la situación problemática planteada. Aquí se requiere establecer relaciones entre los datos y el significado de las operaciones y a partir de allí tomar decisiones, o realizar esquemas que permitan resolver la situación en forma gráfica. Se trata, por tanto, de un proceso que tiene características que dependen de las formas de razonamiento de las personas y de la naturaleza del problema. Es decir, no implica un actuar mecánico. Este paso exige, además, tener un dominio de los conocimientos matemáticos de los que se dispone, especialmente de los relacionados con comprender su significado, su campo de aplicación y sus posibilidades de aplicación a situaciones concretas.

En esta etapa del proceso de resolución de un problema es precisamente donde los estudiantes presentan las mayores dificultades. Por esto se sugiere detenerse en este punto, comentar con los estudiantes cómo puede resolverse un problema determinado, aceptar diferentes propuestas, ponerlas en práctica y discutir los pro y los contra de cada una.

La interpretación de los resultados obtenidos es también una de las etapas determinantes del proceso de resolución de problemas, ya que en esta es posible evaluar si el resultado obtenido tiene sentido dentro del contexto planteado. Sin embargo, muchos estudiantes cometen el error de dar por terminada la tarea de resolver un problema una vez que han obtenido la solución matemática la que, en algunos casos, puede no responder directamente a la situación planteada.

Para esta etapa de la resolución de un problema es fundamental que los estudiantes realicen actividades tendientes a identificar cuál es la interpretación correcta de un resultado obtenido. Deben ser capaces de responder preguntas tales como: ¿qué significa que el resultado sea tal o cual?; ¿tiene sentido el resultado obtenido dentro del contexto de la situación planteada? Así también, es necesario que tomen conciencia que esta etapa del proceso es tan importante como las anteriores, pues si no se realiza, no se puede estar seguro de que el problema ha sido resuelto.

A continuación se presentan algunos aspectos que es conveniente considerar en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas.

El desarrollo de la capacidad para resolver problemas haciendo uso de herramientas matemáticas debe realizarse de forma sistemática y paulatina, de modo que todos los estudiantes logren la asimilación y dominio de las habilidades correspondientes. Se trata, asimismo, de un proceso largo que se debe desarrollar desde los primeros niveles del sistema escolar. En tal sentido, **el trabajo coordinado entre los docentes de los diferentes cursos y ciclos en torno a cómo abordar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas puede favorecer el desarrollo de esta habilidad que va más allá de su aplicación en Matemática.**

Al iniciar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas concretos, se recomienda plantear problemas simples. Además, se sugiere presentarlos a través de dramatizaciones, diagramas o dibujos referidos a la situación problemática planteada y resolverlos de manera grupal, destacando uno a uno los pasos que se están realizando.

Posteriormente, se sugiere utilizar diversas formas de trabajo, por ejemplo, acompañar a los estudiantes mientras resuelven un problema, hacer que los estudiantes trabajen en grupo o en forma individual para encontrar la solución. Cualquiera sea la forma que se utilice, es fundamental hacer hincapié en los pasos que se realizaron para lograr el resultado final.

En aquellos casos en los que se presentan los problemas en forma escrita se sugiere tomar en consideración que la comprensión lectora se transforma en un prerrequisito indispensable para su resolución. Si los estudiantes presentan dificultades de comprensión lectora, se recomienda apoyarse en otros medios para plantear los problemas; por ejemplo, narraciones, dibujos o diagramas.

Además, se sugiere que durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas se propongan situaciones variadas, cuyo objetivo no se limite a ejercitar un determinado procedimiento de cálculo, sino que estén orientadas a desarrollar cada una de las etapas anteriormente señaladas.

Luego de que los estudiantes han internalizado que la resolución de problemas requiere la realización de los pasos mencionados anteriormente, podrán poco a poco, encontrar su propia forma de enfrentar situaciones problemáticas. En tal sentido, se sugiere proporcionar instancias en las cuales, enfrentados a un problema específico, tengan la posibilidad de dialogar: discutir acerca de las estrategias a utilizar para resolverlo y de la interpretación que habría que dar a los resultados obtenidos. Para esto son especialmente útiles los problemas que pueden resolverse de más de una forma, que dan libertad para que cada estudiante desarrolle su propia solución.

En relación con los tipos de problemas que es conveniente presentar en cada uno de los niveles de enseñanza, se sugiere que en lo posible estén acordes a los intereses y capacidades de los estudiantes, que consideran temáticas variadas, que constituyan un desafío para los estudiantes y que su solución implique adquirir nuevos conocimientos, ya sea acerca de sí mismos, de su entorno o del mundo en general.

Por último, es conveniente subrayar que **enfrentarse a una situación problemática y poder darle solución conduce a un estado de satisfacción, aprecio y valoración por lo que se es capaz de hacer, que eleva la autoestima y favorece el desarrollo emocional, factor fundamental para impulsar y fortalecer la motivación por seguir aprendiendo.** Por esto, se recomienda trabajar la resolución de problemas con un enfoque en el cual los errores se consideren oportunidades para reflexionar y aprender. Esto implica un acompañamiento de los estudiantes en el proceso y la incorporación de instancias de conversación.

Dificultades asociadas

Es posible que los estudiantes cometan errores si no han internalizado los pasos mencionados anteriormente para la resolución de problemas: comprensión del problema, representación de la situación concreta en lenguaje matemático, resolución del problema matemático e interpretación de los resultados.

A continuación se analizan tres preguntas de resolución de problemas en las que los estudiantes cometen errores que tienen que ver con la representación de una situación concreta empleando el lenguaje matemático o la interpretación y evaluación de resultados.

En cada caso se proponen algunas sugerencias metodológicas orientadas a apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje en los distintos niveles en los cuales se trabajan contenidos referidos a la temática que estos abarcan.

Ejemplos de errores asociados a procedimientos de trabajo:

Resolución de problemas

Ejemplo de pregunta de representar algebraicamente

Ejemplo 17. *Pregunta de representar algebraicamente (presentado en la página 32)*

Un plan telefónico cobra un cargo fijo de \$2 000 más \$100 por minuto hablado. Si $C(x)$ representa la función cobro en pesos y (x) la cantidad de minutos hablados, ¿cuál de las siguientes funciones representa a $C(x)$?

✗	$C(x) = 2\,000x + 100$	Se confunde el costo fijo con el costo variable.
✗	$C(x) = 2\,100x$	Se suma el costo fijo y el variable y se considera que esa "primera situación" es la variable.
✓	$C(x) = 2\,000 + 100x$	Respuesta correcta.

En esta pregunta se requiere identificar la función $C(x)$, que representa la relación que existe entre el valor que se cobra por llamadas telefónicas, cuando se conoce el cargo fijo, y el costo por minuto hablado.

La representación de situaciones reales a través de relaciones funcionales constituye un punto importante del aprendizaje matemático, ya que a partir de ello es posible resolver diversos problemas.

Al analizar la situación que se plantea en esta pregunta es importante subrayar que la ecuación que se pide no es una ecuación que deba ser resuelta, sino una que expresa una relación entre las variables involucradas, en este caso, entre $C(x)$ y x. Este ejemplo corresponde a una función relativamente simple: la variable independiente es la cantidad de minutos hablados representada por la letra x, y la variable dependiente es el monto que debe cobrar la compañía representada por la expresión $C(x)$. La relación entre ambas está dada por una ecuación del tipo $C(x) = a + bx$, en que $C(x)$ representa el monto que se debe cobrar, el término a representa el cargo fijo y el término bx representa lo que se cobra por los minutos hablados.

En este caso, la relación está dada en el enunciado a través de información entregada en lenguaje verbal. Con esa información se debe comprender que el valor a pagar depende de la cantidad de minutos hablados, pero que, incluso si no se ha hablado ningún minuto, se deberá pagar un monto fijo, que se suma al valor de los minutos hablados.

Para responder correctamente esta pregunta se deben realizar los dos primeros pasos de la resolución de problemas: comprensión del problema y representación de la situación concreta empleando un lenguaje matemático.

En lo relativo a la comprensión del problema, se debe identificar la relación planteada y discriminar entre cuál es el cargo fijo y cuál es el costo variable. Los errores comunes cometidos por los estudiantes indican que algunos de ellos no logran discriminar entre ambos elementos e invierten la situación considerando que el cargo fijo es el que varía.

Además, hay estudiantes que no logran comprender las diferencias prácticas asociadas a un cargo fijo y a uno variable: el fijo se aplica una vez y el variable se aplica la cantidad de veces que ocurre el evento al que se asocia (en este caso, la cantidad de minutos hablados). No comprender estas diferencias puede llevar a hacer una interpretación incorrecta de la situación y, por lo tanto, de la relación solicitada.

Recomendaciones pedagógicas

Para evitar que los estudiantes cometan este tipo de errores se sugiere enfrentarlos a diferentes situaciones en las que se deban relacionar datos fijos con datos variables (por ejemplo, interpretar cuenta de luz, agua, etc.). Se debe ayudar a que los estudiantes vean con claridad cuál es la variable dependiente, cuál es la variable independiente y qué representa cada uno de los términos que aparecen en la ecuación.

Para hacerlo se recomienda conversar con los estudiantes respecto de cada situación y hacer preguntas del tipo: ¿qué significa que se debe pagar un costo fijo?, ¿si se hablan 10 minutos hay que pagar un costo fijo, de cuánto?, ¿si se hablan 15 minutos, cuánto costo fijo hay que pagar?, ¿qué significa que se debe que pagar x por cada minuto hablado?, y ¿qué se debe considerar para determinar cuánto se debe pagar en total?

Una vez comprendida la situación, se recomienda conversar con ellos respecto de cómo esta se puede representar matemáticamente y proceder a hacerlo.

Ejemplos de errores asociados a procedimientos de trabajo:

Resolución de problemas

Ejemplo pregunta de interpretación de problema

Ejemplo 10. *Pregunta de interpretación de problema (presentado en la página 25)*

La suma de dos números es 100. El mayor de los números es cuatro veces el menor de ellos. ¿Cuál es el número mayor?

✗	75	Se interpreta "cuatro veces el menor" como "dividir 100 en 4".
✗	25	Se realiza la misma interpretación que en el error anterior y se responde por el menor de los números encontrados.
✓	80	Respuesta correcta.

En esta pregunta los estudiantes deben encontrar dos números que cumplen ciertas condiciones dadas y señalar cuál es el mayor de ellos.

La pregunta plantea que los dos números en cuestión deben cumplir con dos condiciones: la suma de ambos números debe ser igual a 100 y el mayor de los números debe ser 4 veces el menor.

Los estudiantes que responden 75 cometen un error al interpretar y representar lo que significa que un número sea 4 veces otro. Específicamente, cometen el error de asumir que, si un número es 4 veces el otro, para determinar el valor del número menor se debe dividir la suma de ambos por 4.

Recomendaciones pedagógicas

A continuación se proponen distintas formas de abordar este problema utilizando ecuaciones.

Una posibilidad es utilizar un sistema de ecuaciones con dos incógnitas. Se decide que se necesitan dos incógnitas porque el problema habla de dos cantidades desconocidas. En este caso se emplearán las letras x e y para representarlas.

Como el sistema tiene dos incógnitas, es necesario tener dos ecuaciones. Cada ecuación debe expresar una de las condiciones que plantea el problema.

Una condición es que la suma de los dos números sea 100. Una ecuación que expresa esta condición es:

$$x + y = 100$$

La otra condición es que el número mayor sea 4 veces el menor. Si la incógnita x representa al mayor de los números, entonces la ecuación que representa esta condición es:

$$x = 4y$$

Es importante que los estudiantes vean con claridad que estas ecuaciones efectivamente representan, en un lenguaje matemático, las condiciones dadas por el problema. Ahora, en vez de un problema concreto planteado en lenguaje cotidiano, se tiene un problema matemático planteado en la forma de un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 100 \\ x = 4y \end{array}\right|$$

El paso siguiente es resolver este sistema. Su solución es:

$$x = 80,\ y = 20$$

Finalmente, se debe interpretar este resultado matemático de acuerdo al problema original. Este último no pide dos números, sino solo el mayor. Por lo tanto, la solución al problema original es que el mayor de los dos números es 80.

Otra manera de resolver este problema es utilizar una única ecuación con una incógnita. El planteamiento de la ecuación no es tan directo como en el caso anterior, pues el problema habla de dos números desconocidos y da dos condiciones que se deben cumplir. Sin embargo, se puede lograr resolver la situación planteada.

Como lo que se pide es dar el mayor de los dos números, se puede representar la situación empleando como única incógnita el mayor de estos con la letra x. Luego, ver cómo la única ecuación cumple las dos condiciones del problema. Eso se logra expresando el menor de los números en función del mayor. Como el primero debe ser la cuarta parte del segundo, entonces se puede plantear matemáticamente que el menor de los números es $\frac{x}{4}$. De modo que la única ecuación será:

$$x + \frac{x}{4} = 100$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene que $x = 80$.

Ahora se debe interpretar este resultado. El problema nos pide el mayor de los dos números. Como la incógnita x representa precisamente el mayor de los dos números, la solución al problema es el valor de x, es decir, 80.

Dado que los problemas en la representación de las situaciones muchas veces se traducen en errores al resolverlas, se recomienda que en todos los niveles de enseñanza de Matemática se considere en la resolución de problemas la necesidad de plantear situaciones problemáticas en las que se pongan en evidencia los pasos a seguir y se haga especial hincapié en el paso que se ha denominado "Representación de la situación concreta empleando un lenguaje matemático" ya que, tal como se ha podido observar en esta pregunta, si no se ha logrado asimilar y poner en práctica, la tarea de resolver un problema se ve dificultada.

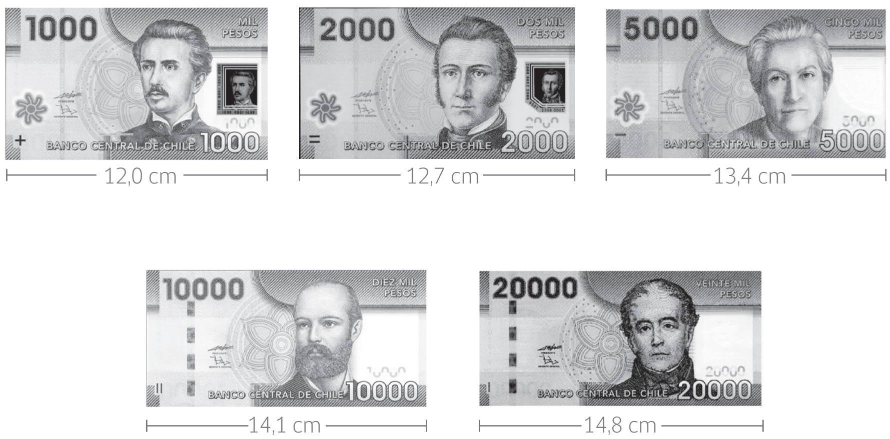
Ejemplos de errores asociados a procedimientos de trabajo:

▸ Resolución de problemas

Ejemplo pregunta de interpretación de resultado

Ejemplo 11. *Pregunta de interpretación de resultado (presentado en la página 26)*

Un juego de mesa utiliza copias de billetes de Chile. Todos los billetes tienen el mismo ancho, pero con diferentes largos, como se muestra a continuación:



Con la misma cantidad de papel que se utiliza para fabricar 8 billetes de $5 000 y 6 billetes de $10 000, ¿cuántos billetes de $1 000 se pueden fabricar como máximo?

✗	16	Se aproxima el resultado obtenido 15,983 a 16 sin considerar que la pregunta implica determinar cuántos billetes de mil pesos pueden ser fabricados.
✓	15	Respuesta correcta.

Esta pregunta consiste en resolver un problema que requiere interpretar el resultado matemático obtenido según su contexto. En este este tipo de preguntas los estudiantes cometen el error de dar como resultado correcto el valor 16. Si bien han utilizado una estrategia correcta para resolver el problema, no han sido capaces de interpretar el resultado en función de la pregunta formulada.

En efecto, el resultado matemático obtenido es 15,98, valor que es correcto. Sin embargo, el error común que se comete al entregar la respuesta a la pregunta formulada es 16, ya que aproximan el resultado obtenido al número entero más próximo. Sin embargo, dado que la pregunta requiere determinar la cantidad máxima de billetes que se puede confeccionar, esta aproximación no resulta correcta, porque 15,98 corresponde a 15 billetes enteros y solo a una parte de otro billete. Por lo tanto, la aproximación correcta es al número entero menor, es decir, 15.

Recomendaciones pedagógicas

A continuación se entregan algunas sugerencias de cómo abordar este problema de manera de usarlo como ejemplo para modelar los pasos para la resolución de problemas.

En primer lugar, se sugiere abordar la comprensión del problema con preguntas como las siguientes: ¿qué se quiere saber?, ¿qué información se tiene?, ¿qué información se requiere calcular?

En este caso, se sabe que el papel disponible es el mismo que se utiliza para hacer 8 billetes de 5 000 y 6 de 10 000. Además, se conocen las medidas de los billetes mencionados y la de los billetes de 1 000.

Posteriormente, se recomienda detenerse en la representación matemática de la situación.

La medida del papel disponible se puede representar matemáticamente por las siguientes operaciones:

$$8 \cdot 13{,}4 + 6 \cdot 14{,}1 \text{ cuyo resultado es igual a } 191{,}8$$

Una vez conocida la medida del papel disponible, la cantidad de billetes de $1000 que se pueden fabricar con ese papel se puede obtener a través de la siguiente división:

$$191{,}8 : 12{,}0 \text{ en que } 12{,}0 \text{ es el largo del billete de } \$1\ 000$$

Luego de representado el problema a través de expresiones matemáticas, corresponde resolver la división propuesta. De esta manera se tiene que:

$$191{,}8 : 12{,}0 = 15{,}98$$

El último paso es interpretar el resultado en el contexto real. El enunciado pide el número de billetes de 1000 que se pueden fabricar, es decir, un número entero; sin embargo, el resultado del problema matemático es un número decimal: 15,98. Estrictamente, el resultado matemático dice que se pueden fabricar 15 billetes enteros y un trozo de billete equivalente a 98 centésimos de billetes. De acuerdo con esto, con el papel disponible solo se pueden fabricar 15 billetes de 1 000, ya que el trozo sobrante no alcanza para un billete entero.

Tal como se mencionó anteriormente, algunos estudiantes fueron capaces de plantear correctamente el problema matemático correspondiente y pudieron resolverlo con éxito. Sin embargo, a la hora de interpretar el resultado obtenido en relación a la situación concreta, cometieron el error de aproximar el resultado a 16, sin considerar que la cantidad de papel que se tiene solo alcanza para hacer 15 billetes enteros.

Para los estudiantes que dieron una respuesta errónea, la resolución de un problema termina cuando se efectúan las operaciones correspondientes, y, si bien reconocen que el resultado no puede ser un número decimal, efectúan la aproximación al valor inmediatamente superior. Es decir, siguen trabajando en el mundo de la matemática, desconociendo que la interpretación del resultado obtenido debe realizarce de acuerdo al contexto de una situación concreta.

Cabe destacar que **es muy frecuente encontrar estudiantes que cometen el error de dar por concluido el proceso para resolver una situación problemática cuando se resuelve la operación matemática seleccionada como vía a la solución al problema.** Lo anterior es así porque seguramente no han comprendido que la operación realizada solo permite resolver el problema en el campo de la matemática y que esa es solo una ayuda para lograr resolver el problema que se da en la realidad. Les hace falta, entonces, tomar conciencia de la necesidad de interpretar el resultado obtenido en función del contexto en que se plantea el problema.

Al igual que en el caso anterior, se sugiere que en todas aquellas instancias en las cuales se plantea la resolución de problemas, se insista en el hecho de que el paso relacionado con la interpretación de los resultados obtenidos debe realizarse necesariamente antes de dar la solución de un problema concreto que se resuelve con ayuda de herramientas matemáticas. Esta recomendación es válida para todos los niveles escolares.

Conclusiones y desafíos

Los errores de conceptos y procedimientos detectados en los estudiantes de II medio a partir de las pruebas Simce de Matemática aplicadas los años 2013 a 2016, muestran que una alta proporción de estudiantes de este nivel no ha consolidado aprendizajes de cursos anteriores que son prerrequisitos o fundamento para construir los nuevos aprendizajes que corresponden a cursos posteriores.

Al hacer un análisis del conjunto de errores detectados, se puede concluir que la mayoría de estos se relaciona con utilizar procedimientos sin una comprensión de los conceptos o lógicas subyacentes. Por ejemplo, en el caso de las fracciones, al no entender que una fracción es un único número (aunque el símbolo está compuesto de dos números), se tiende a operar con el numerador y el denominador en forma independiente. Asimismo, al no comprender el significado de las potencias se cometen errores tanto al trabajar con potencias numéricas como al resolver ejercicios algebraicos en los que se deben aplicar propiedades de las mismas. Es importante, en tal sentido, que los estudiantes conozcan y comprendan los fundamentos de cada uno de los procedimientos que deban utilizar, y que adviertan que ellos no son arbitrarios, tienen un campo de aplicación bien determinado.

Junto con lo anterior, se observaron algunos errores que podrían atribuirse a contenidos que no han sido suficientemente cubiertos; debido a que incluso los estudiantes que obtuvieron los mejores resultados en las pruebas los cometen. Un ejemplo son los conceptos relativos a medidas de tendencia central, donde estudiantes aventajados muestran que, por ejemplo, confunden media con moda. Este problema puede relacionarse con la distribución de contenido durante el año, la que puede afectar la profundidad de los que son trabajados en el último periodo del año; o bien con que se trate de contenidos en los que se presentan debilidades conceptuales, como es el caso de los logaritmos.

De las conclusiones expuestas anteriormente se desprenden, a lo menos, dos desafíos para los docentes y directivos:

- Diseñar estrategias para abordar el aprendizaje matemático longitudinalmente, consolidando y repasando los aprendizajes de los cursos inferiores, que son el fundamento para los superiores. Se sugiere que los docentes de Matemática de los diferentes ciclos tengan instancias para dialogar entre ellos y poner en común sus prácticas.

- Planificar la distribución de los tiempos durante el año escolar, considerando los periodos necesarios para que los contenidos sean trabajados con la profundidad suficiente para lograr su comprensión.

En lo que se refiere al primero de los desafíos, es importante tener en cuenta que el aprendizaje matemático se construye sobre la base de conocimientos y habilidades previamente adquiridos. De esta manera, el logro de los Objetivos de Aprendizajes de I y II medio depende del logro de objetivos de cursos inferiores que son prerrequisito o precursores. Lo anterior hace necesario que el aprendizaje sea concebido como un continuo y que todos los docentes que participan del proceso estén coordinados. Generar las competencias para relacionar los aprendizajes de un curso con los que le preceden y los que le suceden e identificar los conocimientos y habilidades que deben ser reforzados requiere de un trabajo colaborativo entre los docentes, de ahí la importancia de que las escuelas sean capaces de diseñar una estrategia para lograrlo.

Desde lo pedagógico, por ejemplo, se sugiere introducir los conceptos de manera contextualizada y con apoyo de material concreto o representaciones para facilitar su comprensión. Estar familiarizado con la forma en que se introdujeron los conceptos relevantes puede ser útil cuando estos son retomados en cursos superiores para lograr una adecuada vinculación con los nuevos contenidos y reforzar aquellos conceptos y procedimientos que se perciben como más débiles en los estudiantes. Asimismo, tener una referencia de cuándo y en qué contexto se retomará un aprendizaje es importante, pues permite significar mejor dicho contenido y asignarle la relevancia correspondiente.

Existen numerosas estrategias que se pueden utilizar para abordar el aprendizaje como un continuo. Por ejemplo, escoger algunos conceptos transversales a los cursos (valor posicional, operaciones básicas, potencia, entre otros) y realizar sesiones con profesores de básica y media en las que compartan las definiciones y significados de estos, la manera de abordarlos y presentarlos a sus estudiantes, sus aplicaciones, etc.; y se discuta acerca de los errores frecuentes y de cómo abordarlos en los diferentes cursos.

Respecto del segundo desafío, es deseable que se incorporen estrategias que contribuyan a la planificación, dimensionando los tiempos necesarios para lograr la consolidación de los aprendizajes y para repasarlos, de ser necesario. Dado que es recomendable que los estudiantes se enfrenten a situaciones concretas de aprendizajes que consideren la manipulación, el uso de distintas representaciones, metáforas o analogías, como también el uso de herramientas tecnológicas, esto debe ser considerado en las planificaciones que se realicen.

Por último, este documento entrega información útil para reflexionar acerca de las instancias de evaluación que se realizan en el aula y de cómo estas pueden entregar información relevante de lo que los estudiantes han aprendido y de los errores que cometen frecuentemente. En esta línea, cabe hacerse la pregunta de cómo se está aprovechando la información que entregan los resultados de las diferentes evaluaciones: ¿qué tipo de retroalimentación se entrega a los estudiantes en controles, pruebas o trabajos en clases?, ¿se trabaja con los estudiantes el identificar los tipos de errores que cometen y las causas de ello[2]?

Para un óptimo empleo de la información se sugiere, por ejemplo, generar espacios de reflexión con los estudiantes donde se busque el origen de los errores que cometen en las evaluaciones o trabajos. Los errores recogidos y comentados en este documento pueden ayudar a organizar este tipo de actividad. Es importante que se desarrollen estrategias para que los errores sean utilizados para nutrir el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Durante el proceso de aprendizaje es natural cometer errores. Es importante, entonces, estimular a los estudiantes a que pierdan el miedo de equivocarse, de manera que los errores sean considerados como oportunidades de aprendizaje y no como una señal de fracaso.

Se espera que la información entregada en este documento sea un insumo para la reflexión que se realiza al interior de la escuela, de manera que los docentes puedan orientar sus prácticas hacia el logro de mayores aprendizajes en sus estudiantes.

2 Entre las causas de los errores, están las abordadas en este documento, pero además hay otras causas, como no seguir instrucciones, problemas para interpretar información, entre otros.

Lista de referencias

Blanco Nieto, L.; Cárdenas Lizarazo, J. y Caballero Carrasco, A. (2015). *La resolución de problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de Primaria,* Cáceres: Universidad de Extremadura. Recuperado el 24 de octubre de 2017 de: http://mascvuex.unex.es/ebooks/sites/mascvuex.unex.es.mascvuex.ebooks/files/files/file/Matematicas_9788460697602.pdf.

Fazio, L. y Siegler, R. (2011). Teaching fractions. International Academy of Education. International Bureau of Education, *Educational Practices Series 22*. Recuperado el 24 de octubre de 2017 de: http://www.ibe.unesco.org/fileadmin/user_upload/Publications/Educational_Practices/EdPractices_22.pdf.

Ministerio de Educación, Mineduc. (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media* [actualización 2009], Santiago de Chile: autor.

Ministerio de Educación, Mineduc. (2012). *Bases Curriculares Educación Básica*, Santiago de Chile: autor.

Ministerio de Educación, Mineduc. (2013). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio,* Santiago de Chile: autor.

Ministerio de Educación, Mineduc. (2013). *Estándares de Aprendizaje Matemática 4° básico,* Santiago de Chile: autor.

Ministerio de Educación, Mineduc. (2013). *Estándares de Aprendizaje Matemática 8° básico,* Santiago de Chile: autor.

Ministerio de Educación, Mineduc. (2015). *Estándares de Aprendizaje Matemática 2° medio,* Santiago de Chile: autor.

Muñoz, H. (2011). *El significado del signo igual,* Santiago de Chile: Lom.

Muñoz, H. (2011). *Iniciación al empleo de letras en expresiones algebraicas*, Santiago de Chile: Lom.

Muñoz, H. (2011). *Símbolos y convenciones en el lenguaje algebraico,* Santiago de Chile: Lom.

Muñoz, H. (2011). *Expresión y alcances de la distributividad de la multiplicación con respecto a la adición,* Santiago de Chile: Lom.

NI, Y. y ZHOU, Y-D. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias, *Educational Psychologist* 40(1), pp. 27-52 Lawrence Erlbaum Associates, inc. Recuperado el 24 de octubre de 2017 de: http://www.fed.cuhk.edu.hk/eps/people/niyujing_doc/Ni%20&%20Zhou_2005_Educational%20Psychologist.pdf.

Siegler, R. S. y Pyke, A. A. (2012). Developmental and Individual Differences in Understanding of Fractions. Carnegie Mellon University, *American Psychological Association.* Recuperado el 24 de octubre de 2017 de: http://www.psy.cmu.edu/~siegler/SieglerPyke13-early.pdf.

Spinillo, A.G. y Bryant, P. (1991). Children's Proportional Judgments: The Importance of "Half", *Child Development* 62, pp. 427-440.

Wu, H. (2008). Fractions, decimals, and rational numbers, *s.d.* Recuperado el 24 de octubre de 2017 de: http://www.psy.cmu.edu/~siegler/SieglerPyke13-early.pdf.

600 600 2626, opción 7
@agenciaeduca
facebook/Agenciaeducacion
contacto@agenciaeducacion.cl
www.agenciaeducacion.cl

Aprendiendo de los errores | Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de II medio en las pruebas Simce y sus implicancias pedagógicas.